CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

3/7/2006

Esercizio 1. Il coefficiente di amplificazione di $f(x)$ è

$$c_f = \frac{x^2-1}{x^2-x+1}.$$

Poiché $|c_f| < 1.2$ per ogni x, il problema del calcolo della $f(x)$ risulta ben condizionato. Per l'errore algoritmico si ha

$$\epsilon_{alg^{(1)}} = \epsilon^{(3)} + \frac{1}{x^2-x+1}\left((x^2-x)\epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)}\right),$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono rispettivamente gli errori locali della sottrazione $x-1$, della divisione $1/x$ e della addizione;

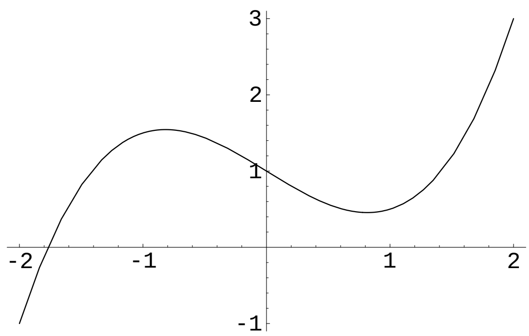
$$\epsilon_{alg^{(2)}} = \eta^{(4)} + \eta^{(3)} + \frac{x^2-x}{x^2-x+1}\left(\eta^{(2)} + \frac{x^2}{x^2-x}\,\eta^{(1)}\right),$$

dove $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$, $\eta^{(3)}$ e $\eta^{(4)}$ sono rispettivamente gli errori locali del quadrato, della sottrazione x^2-x, dell'addizione x^2-x+1 e della divisione. Si ha

$$|\epsilon_{alg^{(1)}}| < u\left(1+\frac{1+|x^2-x|}{|x^2-x+1|}\right) \le \frac{8}{3}u, \qquad |\epsilon_{alg^{(2)}}| < u\left(2+\frac{x^2+|x^2-x|}{|x^2-x+1|}\right) < 4.2\,u.$$

Quindi i due algoritmi sono stabili per ogni x e il primo è preferibile.

Esercizio 2. a) Il grafico della funzione $f(x)$ è



(a) Vi è una sola radice reale $\alpha \in (-2,-1)$. (b) Il metodo delle tangenti converge ad α per ogni scelta di $x_0 < \omega$, dove ω è il punto di massimo di $f(x)$, cioè $\omega = -\sqrt{2/3}$. (c) Se si applica il metodo a partire dal punto $x_0 = 0$ si ha $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, ecc. La successione non risulta convergente. (d) Se si applica il metodo a partire dal punto $x_0 = -2$ si ha $x_1 = -1.8$, $x_2 = -1.76995$. Dalla formula di Taylor si ha

$$f(x_2) = f(\alpha) + (x_2-\alpha)f'(\xi), \quad \text{con} \quad \xi \in (x_2,\alpha).$$

Quindi

$$|x_2-\alpha| < \frac{|f(x_2)|}{\min_{x\in[x_2,\alpha]}|f'(x)}|.$$

Poiché $\alpha < -1.5$ e $f'(x)$ è decrescente per $x < -1.5$, si ha $\min_{x\in[x_2,\alpha]} |f'(x)| > f'(-1.5) = 2.375$. Quindi

$$|x_2 - \alpha| < \frac{0.0025}{2.375} < 0.00106.$$

Esercizio 3. a) Il polinomio caratteristico della matrice di iterazione di Jacobi è $p_J(\lambda) = \lambda^4 - 2/k^4$. I quattro autovalori, tutti distinti, hanno lo stesso modulo $\rho_J = \sqrt[4]{2}/|k|$. Il polinomio caratteristico della matrice di iterazione di Gauss-Seidel è $p_G(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 2/k^4)$. C'è un autovalore uguale a zero di molteplicità tre e un altro uguale a $2/k^4$ di molteplicità 1 ed è $\rho_G = 2/k^4$. Quindi entrambi i metodi sono convergenti per $|k| > \sqrt[4]{2}$ e non convergenti per $|k| \le \sqrt[4]{2}$. (b) Poiché $\rho_G < \rho_J$ per ogni k per cui i due metodi sono convergenti, il metodo di Gauss-Seidel converge più rapidamente di quello di Jacobi.

Esercizio 4. a) Posto $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, si ha

$$f''(x) = \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{2.5}} \quad \text{e} \quad \max_{x\in[0,0.1]} |f''(x)| < 2\,(0.1)^2 + 1 = 1.02.$$

Il resto della formula dei trapezi risulta quindi maggiorato da

$$|R_2^{(N)}| < \frac{(0.1)^3\ 1.02}{12N^2} = \frac{85\ 10^{-6}}{N^2}.$$

Poiché per ogni $x \in (0,1)$ è $\arcsin x > x$, il modulo E dell'errore relativo è maggiorato da

$$E = \frac{|R_2^{(N)}|}{\arcsin 0.1} < \frac{85\ 10^{-6}}{0.1 N^2},$$

e risulta $E < 10^{-6}$ per $N = 30$.