CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

18/1/2006

Esercizio 1. Il coefficiente di amplificazione di $f(x)$ è

$$c_f = \frac{1-2x}{2(1-x)}.$$

Il problema del calcolo della $f(x)$ risulta malcondizionato in un intorno sinistro di 1. Per l'errore algoritmico si ha

$$\epsilon_{alg^{(1)}} = \epsilon^{(3)} + \frac{1}{2}\left(\epsilon^{(2)} + \epsilon^{(1)}\right),$$

dove $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(3)}$ sono rispettivamente gli errori locali della sottrazione, della moltiplicazione e della radice quadrata;

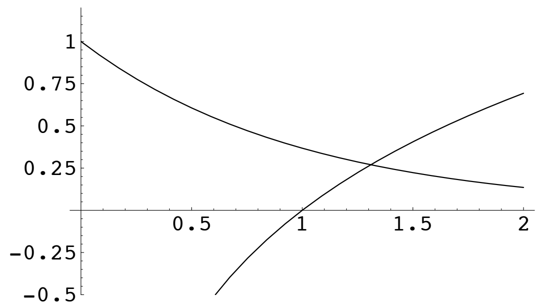
$$\epsilon_{alg^{(2)}} = \eta^{(3)} + \frac{1}{2}\left(\eta^{(2)} - \frac{x}{1-x}\,\eta^{(1)}\right),$$

dove $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$ e $\eta^{(3)}$ sono rispettivamente gli errori locali del quadrato, della sottrazione e della radice quadrata. Si ha

$$|\epsilon_{alg^{(1)}}| < 2u, \quad \text{e} \quad |\epsilon_{alg^{(2)}}| < u\left(\frac{3}{2} + \frac{x}{2(1-x)}\right).$$

Quindi il primo algoritmo è stabile per ogni $x \in [0,1]$ mentre il secondo non lo è in un intorno sinistro di 1. Perciò il primo algoritmo è preferibile.

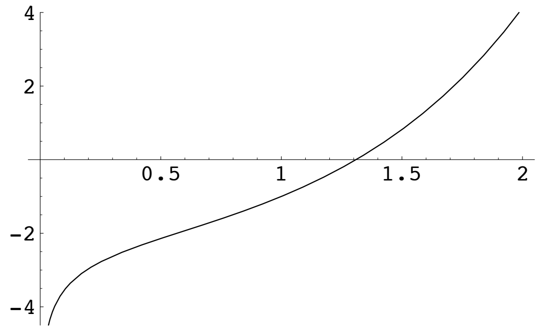
Esercizio 2. a) Per separare le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ consideriamo l'equazione equivalente $\mathrm{e}^{-x} = \log x$ Dal grafico delle due funzioni $y = \mathrm{e}^{-x}$ e $y = \log x$




risulta che vi è una sola radice reale $\alpha > 1$. Come limitazione superiore si può assumere 2. È

$$f'(x) = \mathrm{e}^x\left(\log x + \frac{1}{x}\right) \quad \text{e} \quad f''(x) = \mathrm{e}^x\left(\log x + \frac{2x-1}{x^2}\right).$$

Quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$. Per studiare il segno di $f''(x)$, scriviamo $f''(x) = \mathrm{e}^x F(x)$ e studiamo il segno di $F(x) = \log x + (2x-1)/x^2$. È $F(1/2) = \log(1/2) = -\log 2 < 0$ e $F(1) = \log 1 + 1 = 1$. Perciò $F(x)$ si annulla in un punto $\beta \in (1/2, 1)$. Quindi $\beta$ risulta punto di flesso della $f(x)$. IL grafico di $f(x)$ risulta pertanto




b) Poiché $f(x) > 0$, $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) > 0$ per ogni $x > \alpha$, il metodo delle tangenti converge ad $\alpha$ in modo monotono decrescente per ogni $x_0 > \alpha$. Inoltre, poiché le tangenti alla $f(x)$ condotte in $x \in [\beta, \alpha)$ intersecano l'asse delle ascisse a destra di $\alpha$, si ha convergenza ad $\alpha$ anche per ogni $x_0 > \beta$. Infine, poiché le tangenti alla $f(x)$ condotte in $x \in (0, \beta)$ intersecano l'asse delle ascisse a destra di $x$, si ha convergenza ad $\alpha$ anche per ogni $x_0 > 0$. L'ordine di convergenza è 2 perché $f'(\alpha) \neq 0$ e $f'0(\alpha) \neq 0$.

c) Si ha successivamente

$$\mathrm{e}^x \log x = 1, \quad \mathrm{e}^x = \frac{1}{\log x}, \quad x = \log\Big(\frac{1}{\log x}\Big) = -\log\big(\log x\big).$$

Poiché $f(x)$ ha solo una soluzione maggiore di 1, le due equazioni sono equivalenti in quanto anche la terza ha la stessa soluzione, con la stessa molteplicità.

d) È $g'(x) = 1/(x \log x)$. Quindi $g'(x) < 0$ per ogni $x > 1$. Inoltre nel punto $\alpha$, che verifica la relazione $\log \alpha = \mathrm{e}^{-\alpha}$, si ha $|g'(\alpha)| = \mathrm{e}^{\alpha}/\alpha$ che è $> 1$. Perciò non vi è convergenza locale nell'intorno di $\alpha$.

Esercizio 3. a) La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

è triangolare superiore, quindi i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ e $\lambda_4 = 4$. Per trovare l'autovettore relativo a $\lambda_1$ si risolve il sistema

$$(A - \lambda_1 I)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $x_4 = x_3 = x_2 = 0$ e $x_1 \neq 0$. Come primo autovettore si può assumere $\boldsymbol{x}_1 = [1, 0, 0, 0]^T$. In modo analogo per gli altri autovettori si ha $\boldsymbol{x}_2 = [1, 1, 0, 0]^T$, $\boldsymbol{x}_3 = [1, 1, 1, 0]^T$ e $\boldsymbol{x}_4 = [1, 1, 1, 1]^T$.

b) Generalizzando si $\lambda_i = i$ per $i = 1, \ldots, n$ e $\boldsymbol{x}_i$ uguale al vettore che ha le prime $i$ componenti uguali a 1 e le altre uguali a 0.

c) $S$ è la matrice la cui $i$-esima colonna è $\boldsymbol{x}_i$, quindi $s_{ij} = 1$ per $i \leq j$. $D$ è la matrice diagonale il cui elemento principale di posto $i$ è uguale a $i$.

Esercizio 4. a) Posto $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, si ha $f''(x) = (x(1-x))^{-3/2}/4$. La funzione $f(x)$ non è di classe $C^2$ in $[0,1]$, in quanto non derivabile in 0 e in 1. Quindi non è garantita l'esistenza di un punto $\xi \in [0,1]$ tale che il resto $R_2^{(N)}$ sia uguale a $-(b-a)^3/(12N^2)\, f''(\xi)$. Ne segue che questa espressione non può essere utilizzata per determinare $N$.

b) Posto $z_k = k(b-a)/N = k/10$, si ha

$$\begin{aligned}
\pi &\sim 8 \cdot \frac{1}{2N} \left[ f(z_0) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(z_k) + f(z_N) \right] = \frac{4}{5} \sum_{k=1}^{N-1} f\Big(\frac{k}{10}\Big) \\
&= \frac{4}{5} \sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{\frac{k}{10}\Big(1 - \frac{k}{10}\Big)} = \frac{4}{50} \sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{k(10-k)}.
\end{aligned}$$