CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO

12/6/2006

Esercizio 1. In $\mathcal{F}_{2,4,m,M}$ è $\widetilde{x} = 2^{-1}\ (0.1011)_2$ e $\widetilde{y} = 2^{-2}\ (0.1101)_2$.

a) Riconvertendo in frazioni decimali, si ottiene $\widetilde{x} = 11/32$ e $\widetilde{y} = 13/64$. Quindi $z = \widetilde{x}/\widetilde{y} = 22/13$ e $\widetilde{z} = 2^1\ (0.1110)_2$.

b) Il modulo dell'errore relativo del risultato è

$$|\epsilon| = \left|\frac{x/y - \widetilde{z}}{x/y}\right| = \left|\frac{5/3 - 7/4}{5/3}\right| = \frac{1}{20}.$$

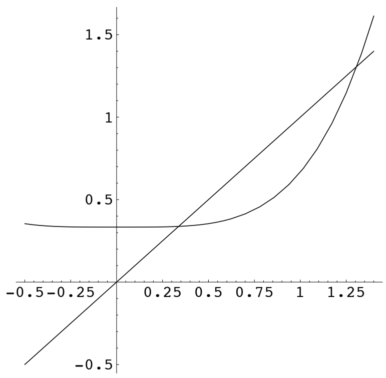
Per la limitazione teorica si ha

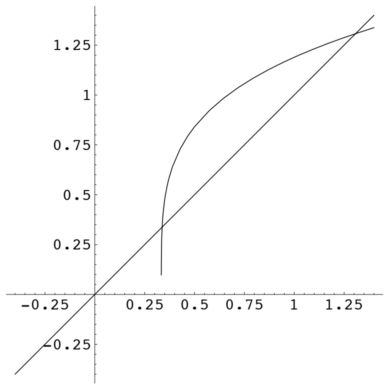
$$\epsilon = \epsilon_{\mathrm{alg}} + \epsilon_1 - \epsilon_2,$$

in cui ϵ_{alg} è l'errore algoritmico (cioè l'errore locale della divisione), ϵ_1 e ϵ_2 sono gli errori relativi dei due operandi. Nel nostro caso questi tre errori sono maggiorati in modulo dalla precisione di macchina dell'arrotondamento, quindi

$$|\epsilon| < 3\ |\epsilon_{\mathrm{arr}}| = \frac{3}{2}\ 2^{-3} = \frac{3}{16}.$$

Esercizio 2. a) La derivata $f'(x) = 4x^3 - 3$ si annulla nel solo punto $x = \sqrt[3]{3/4} \sim 0.91$. Poiché $f(0) = 1$ e $f(1) = -1$, l'equazione $f(x) = 0$ ha solo due soluzioni reali α e β di molteplicità 1, con $0 < \alpha < 1$ e $1 < \beta < 2$. Si disegnano i grafici delle funzioni $y = x$ e $y = g(x)$ (a sinistra) e $y = x$ e $y = h(x)$ (a destra).





In entrambi i casi vi sono due soluzioni positive di molteplicità 1 (infatti $h(x)$ è definita per $x \geq 1/3$ e $\alpha > 1/3$), quindi le due equazioni $x = g(x)$ e $x = h(x)$ sono equivalenti all'equazione data.

b) Per l'equazione $x = g(x)$ si ha $0 < g'(\alpha) < 1$ e $|g'(x)| < 1$ in un intorno di α di raggio ρ, con ρ di poco maggiore di 1/2. In tale intervallo vi è sicuramente convergenza. Dalla figura risulta però che vi è convergenza anche per scelte di x_0 al di fuori di questo intervallo, ad esempio per tutti gli x_0 tali che $|x_0| < \beta$. Non viè convergenza locale a β. Per l'equazione $x = h(x)$, con ragionamenti analoghi si vede che vi è convergenza alla soluzione β in un intorno circolare di β che escluda α e che non vi è convergenza locale ad α.

Esercizio 3. a) È $\det A = 0$

b) L'insieme delle soluzioni del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è formato dai vettori $\boldsymbol{x}$ della forma $\boldsymbol{x} = [3 - h - k\,,\ h\,,\ k]^T$.

c) La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di G sono $\lambda_1 = 0$ (di molteplicità 1) e $\lambda_2 = 1$ (di molteplicità 2). Quindi il metodo non è convergente.

d) Per calcolare le iterazioni del metodo si considera

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 3 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

A partire dal vettore $\boldsymbol{x}^{(0)}$ assegnato si ha

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

e*) La successione ottenuta al punto d) risulta convergente al vettore $\boldsymbol{x} = [7/3\,,\ 1/3\,,\ 1/3]^T$, che appartiene all'insieme delle soluzioni del sistema. Non vi è alcuna contraddizione fra questo risultato e quello indicato in c). Infatti dire che un metodo iterativo per sistemi lineari è convergente, significa dire che vi è convergenza a partire da ogni possibile vettore iniziale. Negare la convergenza del metodo non esclude la possibilità che si ottengano successioni convergenti a partire da particolari punti iniziali.

Esercizio 4. a) è $p(x) = 12x^2 - 13x + 5/2$.

b) Dal teorema del resto dell'interpolazione si ha

$$r(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{f'''(\xi)}{3!}.$$

Poiché $f'''(x) = 8\pi^3\ \sin(2\pi x)$, si ha $|f'''(x)| \le 8\pi^3$. Quindi per $x \in [0, 1/2]$ è

$$|r(x)| \le \frac{8\pi^3}{6} \max_{0 \le x \le 1/2} \left|\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\right|.$$

Poiché nell'intervallo considerato le funzioni $|x - 1/4|$, $|x - 1/3|$ e $|x - 1/2|$ hanno tutte massimo in 0, si ha

$$|r(x)| \le \frac{8\pi^3}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi^3}{18} < 1.8.$$