Soluzione della seconda prova parziale
di Calcolo Numerico del 19 Dicembre 2006

Compito A

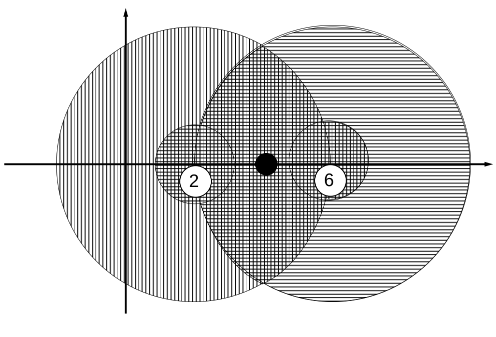
Esercizio 1

1. Si calcola intanto il polinomio caratteristico di A che risulta
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2.$$
Dunque A ha l'autovalore 4 con molteplicità algebrica 2.

2. Risulta $\det A = 16 = 4 \cdot 4$ e $\mathrm{tr}(A) = 8 = 4 + 4$.

3. Si calcolano gli autovettori corrispondenti all'autovalore 4, risolvendo il sistema $(A - 4\,I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si trova che gli autovettori sono tutti della forma $\mathbf{x} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, con $k \neq 0$. Poiché non vi sono due autovettori linearmente indipendenti, la matrice A non è diagonalizzabile.

4. Nella figura i cerchi di Gershgorin per righe hanno tratteggio orizzontale, quelli per colonne hanno tratteggio verticale, l'intersezione delle due unioni ha tratteggio misto e contiene l'autovalore 4, indicato con un punto.



5. L'intersezione $R_1 \cap C_1$ è costituita dal cerchio di centro 2 e raggio 1, l'intersezione $R_2 \cap C_2$ è costituita dal cerchio di centro 6 e raggio 1. L'autovalore 4 non sta in questi due cerchi.

Esercizio 2

1. Se $||F||_1 < 1$ e $||G||_1 < 1$ la matrice A risulta essere a predominanza diagonale in senso stretto per colonne e questo garantisce la convergenza del metodo di Jacobi.

2. In generale il metodo di Jacobi ha la forma $\mathbf{x}^{(k+1)} = J\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$. Nel caso in esame risulta $\mathbf{q} = \mathbf{b}$ e $J = \begin{pmatrix} O & -F \\ -G & O \end{pmatrix}$, dove O indica la matrice nulla di ordine n. Si tratta dunque di calcolare quante moltiplicazioni/divisioni sono necessarie per calcolare il prodotto di J per un vettore. Tale prodotto equivale a due prodotti di due matrici di ordine n per un vettore e quindi può essere eseguito con $2n^2$ moltiplicazioni.

3. Per azzerare ciascuno degli elementi di G sono richieste n moltiplicazioni. Siccome G ha n^2 elementi, in tutto si eseguono n^3 moltiplicazioni. A questo punto la matrice ridotta ha la forma
$$\begin{pmatrix} I & F \\ O & H \end{pmatrix}$$
in quanto l'angolo in basso a destra è stato "riempito" dal procedimento di eliminazione. Per mettere H in forma triangolare occorrono circa altre $n^3/3$ moltiplicazioni divisioni che, sommate al precedente n^3, forniscono un totale di $4n^3/3$ moltiplicazioni/divisioni.

4. Dopo i primi 4 passi di eliminazione si arriva alla matrice $A^{(5)} = \begin{pmatrix} I & F \\ O & H \end{pmatrix}$ con $H = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Un ulteriore passo di eliminazione conduce alla matrice triangolare superiore
$$A^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

5. Nel caso di cui al punto precedente, si ottiene $\det A = \det A^{(6)} = 5$ mentre $\det I \det I - \det F \det G = 1$ (si osservi che $\det I = 1$ e $\det G = \det F = 0$). Questo smentisce la congettura formulata.

Esercizio 3

1. Si trova $p(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)$.

2. Deve essere $q(4) = 2$ da cui
$$2 = p(4) + \alpha(4-1)(4-2)(4-3).$$
Siccome $p(4) = 1$ si trova $\alpha = 1/6$.

3. La teoria garantisce che esiste un solo polinomio di grado minore o uguale a 3 che passa per 4 punti. Questo polinomio è chiamato polinomio di interpolazione. Il polinomio $q(x)$ ha grado 3 e passa per i 4 punti $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,0)$ e $(4,2)$. Deve quindi essere il polinomio di interpolazione.

4. Per il teorema del resto si ha

$$r(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Dall'ipotesi

$$|f^{(4)}(\xi)| \leq \max_{x\in[1,4]} |f^{(4)}(x)| \leq 8.$$

Inoltre, poichè i nodi sono equidistanti, si ha

$$\begin{aligned}\max_{[1,4]} |(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)| &= \max_{[1,2]} |(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)| \\ &\leq \max_{[1,2]} |x-1| \ \max_{[1,2]} |x-2| \ \max_{[1,2]} |x-3| \ \max_{[1,2]} |x-4| = 6.\end{aligned}$$

Dunque

$$\max_{[1,4]} |r(x)| \leq \frac{8}{4!} \max_{[1,4]} |(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)| \leq \frac{1}{3}\, 6 = 2.$$