

Soluzione della prova scritta
di Calcolo Numerico del 5 Febbraio 2007

Esercizio 1

(a) Risulta

$$c_g(x) = x \frac{f'(x)e^{f(x)}}{e^{f(x)}} = xf'(x).$$

(b) In questo caso risulta $c_g(x) = x \cos x$. Per $x \in [0, 1]$ risulta $|c_g(x)| \leq 1$, quindi il calcolo di $g(x)$ è sempre ben condizionato.

(c) In questo caso risulta $c_g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Per $x \in [0, 1]$ risulta $|c_g(x)| \leq \frac{1}{2}$, quindi il calcolo di $g(x)$ è sempre ben condizionato.

(d) Risulta

$$\varepsilon_{\text{alg}} \doteq \varepsilon_1 f(x) + \varepsilon_2,$$

ove ε_1 e ε_2 sono gli errori relativi del calcolo di $f(x)$ e della funzione esponenziale. Dunque

$$|\varepsilon_{\text{alg}}| \leq |\varepsilon_1| |f(x)| + |\varepsilon_2|,$$

da cui si trae la disuguaglianza richiesta, tenuto conto del fatto che $|\varepsilon_i| \leq u$ per $i = 1, 2$.

Esercizio 2

(a) Si traccia innanzitutto il grafico di $y = f(x)$. In particolare $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.

(b) La successione generata scegliendo $x_0 < \alpha$ risulta convergente ad α come si deduce dall'applicazione del teorema di convergenza in largo del metodo delle tangenti.

(c) La successione generata scegliendo $\alpha < x_0 < \beta$ risulta convergente ad α . Dal grafico si deduce che $x_1 < \alpha$ cosicchè si ricade nel caso trattato nel punto precedente.

(d) Se $x_0 > \beta$ la successione generata risulta divergente, per la precisione $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty$. Dal grafico si deduce che si tratta di una successione monotona crescente. Se convergesse dovrebbe convergere ad uno zero di $f(x)$ maggiore di β , che non è presente.

(e) Nei casi di convergenza, l'ordine è 2. Infatti $f(x)$ è derivabile due volte e risulta $f'(\alpha) \neq 0 \neq f''(\alpha)$.

Esercizio 3

(a) Risulta

$$p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

(b) Siccome $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$, tenuto conto di quanto ottenuto nel punto precedente

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Siccome $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda)$, gli autovalori di A sono 1, 2, e 3.

(d) La matrice A è diagonalizzabile in quanto ha autovalori distinti.

Esercizio 4

(a) Utilizzando la formula di Lagrange si trova

$$p(x) = \frac{x(x-1)}{a(a-1)}.$$

(b) Utilizzando le derivate o, equivalentemente, la formula per il vertice di una parabola si trovano le coordinate

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4a(1-a)}\right).$$

(c) Se a tende a zero l'ascissa del massimo resta costante ma l'ordinata tende a $+\infty$.

(d) Risulta

$$\max_{[0,1]} |f(x) - p(x)| \geq \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - p\left(\frac{1}{2}\right)\right| \geq \frac{100}{4 \cdot 0.99} - 1 > 24.$$

(e) Per il teorema del resto

$$\max_{[0,1]} |f(x) - p(x)| = \max_{[0,1]} |x(x-a)(x-1)| \frac{|f'''(\xi)|}{3!} \leq \frac{1}{6} \max_{[0,1]} |f'''(x)|.$$

Utilizzando la limitazione dimostrata nel punto precedente si ottiene

$$\frac{1}{6} \max_{[0,1]} |f'''(x)| > 24,$$

da cui segue la limitazione richiesta.