Quantum Computing

Alessandra Di Pierro

Appunti del corso - A.A. 2001-2002

1 Esercitazione 2

Esercizio 1.1 (Distinguere stati quantistici) *Il sistema A viene preparato in uno dei due stati* non ortogonali $|\varphi\rangle$ *o* $|\tilde{\varphi}\rangle$. *Si vuole conoscere lo stato in cui si trova A senza disturbarlo. Per far questo si prepari un altro sistema B in uno stato $|\beta\rangle$ e si applichi al sistema composto AB una trasformazione unitaria U che trasforma lo stato composto nel seguente modo:*

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\beta\rangle &\quad \rightarrow \quad \left|\Psi'\right\rangle = |\varphi\rangle \otimes \left|\beta'\right\rangle \\ \left|\tilde{\Psi}\right\rangle = |\tilde{\varphi}\rangle \otimes |\beta\rangle &\quad \rightarrow \quad \left|\tilde{\Psi}'\right\rangle = |\tilde{\varphi}\rangle \otimes \left|\tilde{\beta}'\right\rangle, \end{aligned}$$

lasciando effettivamente indisturbato lo stato del sistema A. Si esegua ora una misurazione sul sistema B che permetta di distinguere gli stati $|\beta'\rangle$ e $\left|\tilde{\beta}'\right\rangle$.

1. *É possibile trovare una tale trasformazione unitaria U, nell'ipotesi di non-ortogonalitá degli stati $|\varphi\rangle$ e $|\tilde{\varphi}\rangle$?*
2. *Cosa cambia se gli stati $|\varphi\rangle$ e $|\tilde{\varphi}\rangle$ sono ortogonali?*

1. Se esistesse una trasformazione unitaria U tale da trasformare il sistema ausiliario B in due stati $|\beta'\rangle$ o $\left|\tilde{\beta}'\right\rangle$ distinguibili con probabilitá 1, allora dovremmo concludere che é sempre possibile distinguere due stati non ortogonali come $|\varphi\rangle$ e $|\tilde{\varphi}\rangle$, contrariamente a quanto dimostrato nella Lezione 8.

   Vediamo formalmente l'effetto che avrebbe U sugli stati di input $|\Psi\rangle$ e $\left|\tilde{\Psi}\right\rangle$. Notiamo che

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\Psi}' \middle| \Psi' \right\rangle &= \langle\tilde{\varphi}|\varphi\rangle \left\langle \tilde{\beta}' \middle| \beta' \right\rangle \\ \left\langle \tilde{\Psi} \middle| \Psi \right\rangle &= \langle\tilde{\varphi}|\varphi\rangle \left\langle \tilde{\beta} \middle| \beta \right\rangle = \langle\tilde{\varphi}|\varphi\rangle \end{aligned}$$

Sostituendo $|\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle$ e $\left\langle\tilde{\Psi}'\right| = \left\langle\tilde{\Psi}\right|U^\dagger$, si ottiene, poiché U é unitaria,

$$\left\langle\tilde{\Psi}'\middle|\Psi'\right\rangle = \left\langle\tilde{\Psi}\middle|U^\dagger U\middle|\Psi\right\rangle = \left\langle\tilde{\Psi}\middle|\Psi\right\rangle,$$

e quindi

$$(\langle\tilde{\varphi}|\varphi\rangle)(\left\langle\tilde{\beta}'\middle|\beta'\right\rangle - 1) = 0.$$

Dall'ipotesi che $\langle\tilde{\varphi}|\varphi\rangle \neq 0$ concludiamo che $|\beta'\rangle$ e $\left|\tilde{\beta}'\right\rangle$ sono stati identici e quindi non distinguibili da nessuna misurazione.

2. Se gli stati $|\varphi\rangle$ e $|\tilde{\varphi}\rangle$ sono ortogonali il ragionamento precedente non porta a nessuna conclusione. In generale, si puó trovare una trasformazione U che permette di distinguere i due stati del sistema A attraverso una misurazione del sistema ausiliario B. Una possibilitá é applicare il `CNOT` dopo aver opportunemente scelto le basi.

Esercizio 1.2 (Operatori di densitá) *Considera due stati quantistici descritti dagli operatori di densitá ρ e $\tilde{\rho}$ in uno spazio di Hilbert n-dimensionale. Considera una misurazione in una base ortonormale definita dall'insieme di operatori di proiezione (di dimensione 1) $\{P_a \mid a = 1, 2, \ldots, n\}$ che sodisfano l'equazione di completezza $\sum_{a=1}^{n} P_a = I$. Quando si esegue una misurazione, il risultato a é ottenuto con probabilitá $p_a = tr(\rho P_a)$ se lo stato é ρ e con probabilitá $\tilde{p}_a = tr(\tilde{\rho} P_a)$ se lo stato é $\tilde{\rho}$.*
La distanza di Kolmogorov *tra due distribuzioni di probabilitá é definita come*

$$d(p, \tilde{p}) \equiv \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} |p_a - \tilde{p}_a|.$$

1. *Verificare che*

$$d(p, \tilde{p}) \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|,$$

dove i λ_i sono gli autovalori dell'operatore Hermitiano $\rho - \tilde{\rho}$.

2. *Per quali operatori di proiezione $\{P_a\}$ vale l'uguaglianza*

$$d(p, \tilde{p}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|?$$

1. L'operatore $\rho - \tilde{\rho}$ ammette una rappresentazione diagonale (poiché é Hermitiano). Supponiamo che tale rappresentazione sia $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |i\rangle \langle i|$, dove $|i\rangle$ é una base ortonormale di autovettori con corrispondenti autovalori λ_i. L'espressione $|p_a - \tilde{p}_a|$ puó essere quindi riscritta come segue:

$$\begin{aligned} d(p,\tilde{p}) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} |p_a - \tilde{p}_a| \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} |tr(\rho E_a) - tr(\tilde{\rho} E_a)| \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} |tr(\rho - \tilde{\rho}) E_a)| \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} \left| tr\left(E_a \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |i\rangle \langle i| \right) \right| \end{aligned}$$

Per la linearitá dell'operazione tr e la sua proprietá dimostrata nell'esempio A.1 della Lezione 8, si ottiene:

$$\begin{aligned} d(p,\tilde{p}) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} tr(E_a \lambda_i |i\rangle \langle i|) \right| \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle i| E_a |i\rangle \right| \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| |\langle i| E_a |i\rangle| \end{aligned}$$

Osserviamo ora che l'espressione $\langle i| E_a |i\rangle$ deve essere un numero non negativo per ogni a, in quanto corrisponde alla probabilitá del risultato a nello stato puro descritto dall'operatore di densitá $|i\rangle \langle i|$. Possiamo allora applicare la proprietá di completezza degli operatori di proiezione:

$$\begin{aligned} d(p,\tilde{p}) &\leq \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \langle i| E_a |i\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \langle i| \sum_{a=1}^{n} E_a |i\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \langle i| I |i\rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

2. Scegliendo gli operatori E_a come le proiezioni ortogonali nella base diagonale di $\rho - \tilde{\rho}$, cioé $E_a = |a\rangle \langle a|$, l'uguaglianza

$$d(p,\tilde{p}) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle i| E_a |i\rangle \right|$$

travata nella derivazione precedente, diventa

$$d(p,\tilde{p}) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ia} \right| = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} |\lambda_a|.$$