Quantum Computing

Alessandra Di Pierro

Appunti del corso - A.A. 2001-2002

Lezione 8: Introduzione alla meccanica quantistica

1 Misurazione quantistica: distinguere stati quantistici

Un'applicazione importante del Postulato 3 sulla misurazione quantistica riguarda il problema di *distinguere stati quantistici*. In meccanica quantistica, stati non ortogonali non possono essere distinti, cioé non esiste nessuna misurazione che permetta di stabilire con probabilitá 1 qual'é lo stato che stiamo misurando. Al contrario, se gli stati sono ortogonali é sempre possibile distinguerli. Infatti, é sufficiente eseguire una misurazione definita mediante gli operatori di proiezione $P_m = |m\rangle \langle m|$ (dove $\{|m\rangle\}$ formano un insieme ortonormale di stati), tali che $\sum_m P_m = I$. Si verifica facilmente che una misurazione nello stato $|m\rangle$ dá come risultato m con probabilitá $\langle m| P_m |m\rangle = 1$.

Una dimostrazione formale del fatto che non esiste nessuna misurazione in grado di distinguere due stati non ortogonali $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ si puó ottenere per contraddizione.
Supponiamo che tale misurazione esista. Allora esisteranno operatori E_1 e E_2 tali che

$$\langle\psi_1| E_1 |\psi_1\rangle = 1 \text{ e } \langle\psi_2| E_2 |\psi_2\rangle = 1.$$

Poiché $\sum_i E_i = I$, segue che $\sum_i \langle\psi_1| E_i |\psi_1\rangle = 1$ e quindi $\langle\psi_1| E_2 |\psi_1\rangle = 0$, cioé $\langle\psi_1| \sqrt{E_2}\sqrt{E_2} |\psi_1\rangle = 0$, da cui segue $\sqrt{E_2} |\psi_1\rangle = 0$. Dall'ipotesi di non ortogonalitá di $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, possiamo decomporre $|\psi_2\rangle$ in una componente parallela a $|\psi_1\rangle$ ed una, $|\varphi\rangle$, ortogonale a $|\psi_1\rangle$, cioé possiamo scrivere $|\psi_2\rangle = \alpha |\psi_1\rangle + \beta |\varphi\rangle$, con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ e $|\beta| < 1$. Otteniamo quindi che $\sqrt{E_2} |\psi_2\rangle = \beta\sqrt{E_2} |\varphi\rangle$. Ma allora

$$\langle\psi_2| E_2 |\psi_2\rangle = |\beta|^2 \langle\varphi| E_2 |\varphi\rangle ,$$

che é in contraddizione con l'ipotesi che $\langle\psi_2|\, E_2\, |\psi_2\rangle = 1$. Infatti, poiché

$$\langle\varphi|\, E_2\, |\varphi\rangle \leq \sum_i \langle\varphi|\, E_i\, |\varphi\rangle = \langle\varphi|\, \varphi\rangle = 1,$$

si ha che $|\beta|^2 \langle\varphi|\, E_2\, |\varphi\rangle \leq |\beta|^2 < 1$ e quindi $\langle\psi_2|\, E_2\, |\psi_2\rangle < 1$.

2 L'operatore di densitá

Nella lezione precedente abbiamo descritto la meccanica quantistica formulando i suoi postulati fondamentali nel linguaggio matematico dei vettori di stato. Una formulazione del tutto equivalente puó essere data in termini di *operatori di densitá* o *matrici di densitá*. Il vantaggio di questa seconda alternativa sta nel fatto che essa fornisce un modo piú conveniente per descrivere sistemi quantistici il cui stato non si conosce completamente, ma si puó solo dire che é uno di un certo insieme $\{|\psi_i\rangle\}$ con probabilitá p_i corrispondente all'indice i. Queste probabilitá p_i sono probabilitá "classiche" da non confondere con le ampiezze di probabilitá di uno stato quantistico *puro* come, ad esempio,

$$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,.$$

Lo stato $|\psi\rangle$ é una sovrapposizione degli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ con ampiezze a e b. Il significato di ció é che come risultato di una misurazione di $|\psi\rangle$ nella base $|0\rangle$ e $|1\rangle$ si otterrá lo stato $|0\rangle$ con probabilitá $|a|^2$, e lo stato $|1\rangle$ con probabilitá $|b|^2$. La situazione é ben diversa se si considera uno stato che non si conosce esattamente, ma di cui si sa soltanto che con probabilitá a é lo stato $|0\rangle$ e con probabilitá b é lo stato $|1\rangle$. Si parla in questo caso di *stato misto*.
L'insieme $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ é detto un *ensemble di stati puri* ed é descritto dall'operatore (o matrice) di densitá

$$\rho \equiv \sum_i p_i\, |\psi_i\rangle\, \langle\psi_i|\,.$$

L'operatore di densitá di uno stato puro $|\psi\rangle$ é semplicemente $\rho = |\psi\rangle\,\langle\psi|$. Esiste un semplice criterio per determinare se uno stato é puro o misto: uno stato puro soddisfa $tr(\rho^2) = 1$, mentre per uno stato misto si ha $tr(\rho^2) < 1$. La dimostrazione é lasciata come esercizio.

Per riformulare i postulati della meccanica quantistica in termini di matrici di densitá, descriviamo l'evoluzione, la misurazione e la composizione di sistemi quantistici il cui stato é un ensemble di stati puri.

Abbiamo detto che l'evoluzione di un sistema quantistico chiuso é descritta da un operatore unitario U. Se il sistema si trova inizialmente nello stato $|\psi_i\rangle$ con probabilitá p_i, si troverá dopo la trasformazione nello stato $U|\psi_i\rangle$ con probabilitá p_i. Quindi l'evoluzione dell'operatore di densitá si puó descrivere come

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \to \sum_i p_i U |\psi_i\rangle \langle\psi_i| U^\dagger = U\rho U^\dagger.$$

Una misurazione descritta da operatori di proiezione P_m dará il risultato m con probabilitá condizionale

$$p(m|i) = \langle\psi_i| P_m |\psi_i\rangle,$$

se lo stato iniziale era $|\psi_i\rangle$. Usando l'uguaglianza dell'esempio A.1, otteniamo l'espressione

$$p(m|i) = tr(P_m |\psi_i\rangle \langle\psi_i|).$$

Per la legge della probabilitá totale, la probabilitá di ottenere il risultato m risulta quindi

$$p(m) = \sum_i p(m|i)p(i) = \sum_i p(i)tr(P_m |\psi_i\rangle \langle\psi_i|) = tr(P_m\rho).$$

Dopo aver effettuato la misurazione con risultato m, si ottiene un ensemble di stati $|\psi_i^m\rangle$, ciascuno con probabilitá $p(i|m)$, dove

$$|\psi_i^m\rangle = \frac{P_m |\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle\psi_i| P_m |\psi_i\rangle}},$$

e, dalla teoria della probabilitá

$$p(i|m) = p(m,i)/p(m) = p(m|i)p_i/p(m).$$

Pertanto, l'operatore di densitá risultante é

$$\rho_m = \sum_i p(i|m) |\psi_i^m\rangle \langle\psi_i^m| = \frac{P_m\rho P_m}{tr(P_m\rho)}.$$

Abbiamo enfatizzato precedentemente che esiste una differenza essenziale tra una sovrapposizione coerente degli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$, e un insieme probabilistico in cui $|0\rangle$ e $|1\rangle$ occorrono ciascuno con probabilitá specificate. Il seguente esempio illustra questa differenza facendo vedere i diversi effetti di una misurazione nei due casi.

Esempio 2.1 *Consideriamo l'osservabile X e misuriamolo nello stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. X ha autovalori $+1$ e -1 con corrispondenti autovettori $|x_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ e $|x_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$, cioé*

$$X = |x_1\rangle \langle x_1| - |x_2\rangle \langle x_2| .$$

Quindi la misurazione di X nello stato $|\psi\rangle = |x_1\rangle$ dá il risultato $+1$ con probabilitá

$$p(1) = \langle\psi| x_1\rangle \langle x_1|\psi\rangle = 1,$$

e lo stato dopo la misurazione risulta

$$|\psi'\rangle = \frac{|x_1\rangle \langle x_1|\psi\rangle}{1} = |x_1\rangle .$$

Consideriamo ora l'ensemble $\{\frac{1}{2}, |0\rangle ; \frac{1}{2}, |1\rangle\}$. L'operatore di densitá che lo descrive é

$$\rho = \frac{1}{2}|0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle \langle 1| = \frac{1}{2}I.$$

Si verifica facilmente che in questo caso la probabilitá di ottenere il risultato $+1$ é

$$p(1) = tr(|x_1\rangle \langle x_1| \rho) = \frac{1}{2}tr(|x_1\rangle \langle x_1|) = \frac{1}{2},$$

mentre lo stato del sistema dopo la misurazione risulta descritto dall'operatore di densitá $|x_1\rangle \langle x_1|$ corrispondente allo stato puro $|x_1\rangle$.

Un sistema quantistico si puó trovare in una *mistura* di stati ρ_i, ciascuno con probabilitá p_i. É facile verificare che in questo caso la matrice di densitá che descrive il sistema é $\rho = \sum_i p_i \rho_i$.

2.1 Proprietá generali dell'operatore di densitá

Gli operatori di densitá si possono definire indipendentemente dall'ensemble di stati puri che descrivono. Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione completa di un operatore di densitá mediante due proprietá che sono condizioni necessarie e sufficienti affinché un operatore ρ sia un operatore di densitá associato a qualche ensemble $\{p_i, \psi_i\}$.

Teorema 2.2 *Un operatore ρ é l'operatore di densitá associato a qualche ensemble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ se e solo se soddisfa le condizioni:*

1. $tr(\rho) = 1$,

2. ρ é un operatore positivo.

La seconda condizione significa che per ogni vettore $|v\rangle$, il prodotto scalare di $|v\rangle$ e $\rho\,|v\rangle$ é un numero reale, non negativo.

É importante notare che gli autovalori e autovettori di un operatore di densitá non individuano univocamente l'ensemble di stati puri che l'operatore descrive, ma ne indicano soltanto uno tra quelli possibili.

Esempio 2.3 *La matrice di densitá*

$$\rho = \frac{3}{4}\,|0\rangle\,\langle 0| + \frac{1}{4}\,|1\rangle\,\langle 1|$$

descrive un sistema quantistico che si puó trovare nello stato $|0\rangle$ con probabilitá $\frac{3}{4}$ e nello stato $|1\rangle$ con probabilitá $\frac{1}{4}$. Si verifica facilmente che la stessa matrice descrive tuttavia anche l'ensemble $\{\frac{1}{2}, |a\rangle\,; \frac{1}{2}, |b\rangle\}$, dove $|a\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}\,|1\rangle$ e $|b\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}\,|0\rangle - \sqrt{\frac{1}{4}}\,|1\rangle$.

2.2 Riformulazione dei postulati della meccanica quantistica

Postulato 1 Ad ogni sistema fisico isolato é associato uno spazio di Hilbert detto spazio degli stati del sistema. Il sistema é completamente descritto dal suo operatore di densitá, cioé un operatore positivo e con tarccia 1 che agisce sullo spazio degli stati. Se un sistema é nello stato ρ_i con probabilitá p_i, allora l'operatore di densitá per il sistema é $\sum_i p_i \rho_i$.

Postulato 2 L'evoluzione di un sistema quantistico chiuso é descritto da una trasformazione unitaria. La relazione

$$\rho' = U \rho U^\dagger$$

descrive la trasformazione dello stato ρ del sistema al tempo t_1 nello stato ρ' del sistema al tempo t_2, mediante l'operatore unitario U che dipende solo dagli istanti t_1 e t_2.

Postulato 3 Un osservabile é un operatore Hermitiano

$$M = \sum_m m P_m,$$

dove P_m é la proiezione sull'autospazio di M corrispondente all'autovalore m. I possibili risultati di una misurazione dell'osservabile M corrispondono agli autovalori m di M. Se lo stato del sistema immediatamente prima della misurazione é ρ, allora la probabilitá di ottenere il risultato m é data da

$$p(m) = tr(P_m \rho),$$

e lo stato del sistema dopo la misurazione é

$$\frac{P_m \rho P_m}{tr(P_m \rho)}.$$

Gli operatori P_m soddisfano le relazioni $\sum_m P_m = I$ e $P_m P_{m'} = \delta_{mm'} P_m$.

Postulato 4 Lo spazio degli stati di un sistema fisico composto é il prodotto tensore degli spazi degli stati dei sistemi fisici componenti. Se il sistema i-esimo é preparato nello stato ρ_i, allora lo stato del sistema composto é $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \ldots \rho_n$.

A Richiami di Algebra Lineare

A.1 Traccia di una matrice

La traccia di una matrice A é definita come la somma dei suoi elementi diagonali

$$tr(A) \equiv \sum_i A_{ii}.$$

La traccia ha le seguenti proprietá:

- é ciclica: $tr(AB) = tr(BA)$;
- é lineare: $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ e $tr(zA) = ztr(A)$,

dove A e B sono matrici arbitrarie e $z \in \mathbb{C}$.

Dalla prima proprietá segue che la traccia é invariante per trasformazioni unitarie di similaritá $A \rightarrow UAU^\dagger$. Infatti, $tr(UAU^\dagger) = tr(U^\dagger UA) = tr(A)$.

La traccia di un operatore lineare A é la traccia di una qualsiasi rappresentazione matriciale di A.

Esempio A.1 *Consideriamo un vettore unitario $|\psi\rangle$ e un operatore lineare A. Per calcolare la traccia di $A|\psi\rangle\langle\psi|$, estendiamo $|\psi\rangle$ ad una base ortonormale $\{|i\rangle\}$ che include $|\psi\rangle$ come primo elemento (mediante la procedura di*

Gram-Schmidt). Ricordando che la rappresentazione mediante prodotti esterni di un operatore L rispetto ad una base ortonormale $\{|i\rangle\}$ *é*

$$\sum_{ij} \langle j| L |i\rangle |j\rangle \langle i| \, ,$$

con $\langle j| L |i\rangle$ *come elemento nella riga* j *e colonna* i *della matrice di rappresentazione di* L*, abbiamo allora*

$$tr(A |\psi\rangle \langle\psi|) = \sum_{i} \langle i| A |\psi\rangle \langle\psi| |i\rangle = \langle\psi| A |\psi\rangle \, .$$