Laboratorio computazionale numerico
Lezione 9

Federico Poloni <f.poloni@sns.it>

2009-12-16

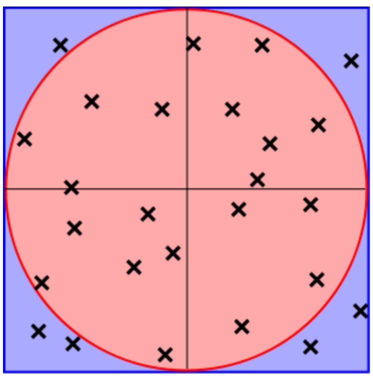
1 Calcolo di π con il metodo Montecarlo

Supponiamo di prendere un punto a caso nel quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Qual è la probabilità che esso sia all'interno del cerchio inscritto di raggio 1? È $\frac{\pi}{4}$, cioè il rapporto tra l'area del quadrato e l'area del cerchio. Quindi, per la legge dei grandi numeri, se prendo n punti a caso all'interno del quadrato, il rapporto

$$\frac{\#\{\text{punti all'interno del cerchio}\}}{n}$$

tende a $\frac{\pi}{4}$. Questo ci suggerisce un metodo per calcolare un'approssimazione di π nel modo seguente:

1. Scegliere n punti a caso in $[-1, 1] \times [-1, 1]$
2. Determinare il numero r di questi punti che stanno nel cerchio $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$
3. Restituire $4\frac{r}{n}$.



Esercizio 1. Scrivete una funzione **function** pi_appr=montecarlo(n) che calcoli un'approssimazione di π in questo modo.
Hint: se a e b sono matrici $m \times n$, l'istruzione a>=b restituisce una matrice che contiene 1 in (i, j) se $a_{ij} \geq b_{ij}$ e 0 altrimenti.

Esercizio 2. Quanto velocemente converge a π il valore trovato? Si calcoli montecarlo(n) per diversi valori di n (anche fino a $n \approx 50000$ dovrebbe essere fattibile se scrivete il programma con attenzione) e si traccino i risultati su un grafico (funzione **plot**). Il plot più significativo si ottiene prendendo un grafico logaritmico: si calcola la funzione su $n = 2^k$, e poi si riportano sul grafico k sull'asse delle ascisse e $\log |\text{montecarlo(n)} - \pi|$ sulle ordinate.

Esercizio 3. Qual è l'ordine di convergenza del metodo?

Esercizio 4. Invece del numero di punti in $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$, contate il numero di punti in $\{x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$. A quale numero converge? Converge più o meno velocemente del metodo precedente?

Esercizio 5. Calcolate in modo approssimato con lo stesso trucco l'integrale $\int_0^1 x^2 dx$: quanti punti scelti a caso in $[0, 1] \times [0, 1]$ cadono nell'area sotto la parabola?

2 DFT e matrici di Toeplitz

Qui vogliamo usare la trasformata discreta di Fourier (DFT) e la sua inversa (IDFT). Detta ζ_n una radice n-esima primitiva complessa di 1, la DFT (o la IDFT?) è la funzione che presi i coefficienti $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$ di un polinomio $a(x) := \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ di grado minore di n e calcola $a(\zeta_n^k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Esercizio 6. Le funzioni **fft** e **ifft** di Octave calcolano la DFT diretta e inversa. La documentazione (**help fft**) è un po' carente; cercate di capire cosa calcolano esattamente facendo un po' di esperimenti!

Esercizio 7. Utilizzando la DFT (e la IDFT), scrivete una funzione **function** c=polymul(a,b) che calcoli il prodotto di due polinomi (dati come i vettori dei loro coefficienti). Hint: quale dimensione dovete vi serve perché "ci sia spazio" per tutti i coefficienti del prodotto? Quindi i vettori a e b sono troppo corti vanno "allungati" con un numero opportuno di zeri...

2.1 Matrici di Toeplitz

Una matrice si chiama *matrice di Toeplitz* se i suoi elementi a_{ij} dipendono solo dalla differenza $i - j$; cioè, se sono costanti lungo le diagonali parallele a quella principale.

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 8. Scrivete (utilizzando la DFT...) una funzione che calcola il prodotto tra una matrice di Toeplitz *triangolare inferiore* e un vettore:

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{-1} & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & 0 & 0 \\ a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & 0 \\ a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = ?$$

Potete rappresentare la matrice di Toeplitz passando alla funzione la sua prima colonna c: **function** y=lower_toeplitz_vector(c,x).

Esercizio 9. Scrivete una funzione che calcola il prodotto tra una matrice di Toeplitz *triangolare superiore* e un vettore. Potete rappresentare la matrice di Toeplitz con la sua prima riga.

Scrivete una funzione che calcola il prodotto tra una matrice di Toeplitz generica e un vettore. Potete rappresentare la matrice di Toeplitz passando alla funzione la sua prima colonna e la sua prima riga: **function** y=toeplitz_vector(c,r,x). Hint: il modo più semplice è usare le due funzioni appena scritte, ma ci sono metodi che usano meno DFT — continuate a leggere per vederli.

Esercizio 10. La somma di matrici di Toeplitz è una matrice di Toeplitz? Il prodotto? L'inversa? E se le matrici sono triangolari inferiori/superiori?

Una matrice di Toeplitz è detta *circolante* se $a_{-k} = a_h$ ogniqualvolta $h-k = n$. Per esempio

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 11. Scrivi una **function** y=circulant_vector(r,x) che esegue il prodotto tra una matrice circolante con prima riga r e il vettore x. Quante DFT/IDFT servono?

Esercizio 12. Il prodotto tra matrici circolanti è una matrice circolante? E l'inversa?

Esercizio 13. Scrivete una funzione **function** y=toeplitz_vector2(c,r,x) che calcoli il prodotto Toeplitz $n \times n$-vettore basandosi sul prodotto tra una matrice circolante $2n \times 2n$ e un vettore $2n \times 1$.