

Compitino di MD  
19 Dicembre 2014

Cognome e nome: COMETI ONE  
Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

**IMPORTANTE:** Scrivere la soluzione negli appositi spazi. Per lo svolgimento si può utilizzare se necessario anche il retro del foglio. **Non verranno valutati i fogli di brutta copia.** Non si possono usare libri, appunti, o dispositivi elettronici e non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. **Scrivere il nome su ciascun foglio.**

**Esercizio 1.**

Trovare tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} \text{[i]} & 6x \equiv 4 \pmod{8} \\ \text{[ii]} & 7x \equiv 8 \pmod{26} \end{cases}$$

Risposta:  $x \equiv \boxed{42} \pmod{\boxed{52}}$ .

Svolgimento:

Da (i) semplifico un 2:  $3x \equiv 2 \pmod{4}$

$$\Leftrightarrow -x \equiv 2 \pmod{4} \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod{4} \quad \text{[ia]}$$

Per il teo. cinese, [ii] equivale a

$$\begin{cases} 7x \equiv 8 \pmod{2} & \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{2} & \text{[iia]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x \equiv 8 \pmod{13} & \Leftrightarrow 14x \equiv 16 \pmod{13} \Leftrightarrow x \equiv 3 \pmod{13} & \text{[iib]} \end{cases}$$

[iia] è superflua perché implicata da [ia]

$$\begin{cases} \text{[ia]} & x \equiv 2 \pmod{4} \\ \text{[iib]} & x \equiv 3 \pmod{13} \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv 42 \pmod{52}$$

per teo. cinese

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

**Esercizio 2.** Consideriamo la seguente equazione lineare diofantea dipendente dal parametro  $a \in \mathbb{Z}$ :

$$231 = ax + 99y.$$

Rispondere alle seguenti domande barrando la risposta giusta. Sotto ogni risposta scrivere una breve motivazione.

1. Per  $a = 45$  l'equazione ha soluzione.  Vero,  Falso.

Motivazione:  $ax+by=c$  ha sol. sse  $\text{mcd}(a,b) | c$

$$c=231=3 \cdot 7 \cdot 11 \quad \text{mcd}(45,99)=9, \text{ no!}$$

2. Per  $a = 330$  l'equazione ha soluzione.  Vero,  Falso.

Motivazione:

come sopra  
 $\text{mcd}(330,99)=33$  si!

3. Se  $a$  divide 63 l'equazione ha sempre soluzione.  Vero,  Falso.

Motivazione:

Per  $a=63$  (che è un divisore di 63! e anche  $a=9$ )  
 $\text{mcd}(a,b)=9$  e non funziona

4. Se  $a$  divide 132 l'equazione ha sempre soluzione.  Vero,  Falso.

Motivazione:

$$\text{Se } a|132, \quad \text{mcd}(a,99) | \text{mcd}(132,99)=33$$

$$\text{Quindi } \text{mcd}(a,99) | 231:$$

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

**Esercizio 3.**

Determinare tutte le soluzioni della congruenza  $6^x \equiv 7 \pmod{11}$

Risposta:  $x \equiv \boxed{3} \pmod{\boxed{10}}$ .

Svolgimento:

$6^0$	$6^1$	$6^2$	$6^3$	$6^4$	$6^5$	$6^6$	$6^7$	$6^8$	$6^9$	$6^{10}$
1	6	$36 \equiv 3$	$3 \cdot 6 \equiv 7$	?	$7 \cdot 3 \equiv -1$	?	?	?	?	1

questi non possono essere 1 perché  $\text{ord}(6) \nmid 10$  (teo. Fermat) e neppure 7 altrimenti avrei ripetizioni prime dell'1 (per teo. Fermat)

Le potenze di 6 si ripetono mod 10 (non 11!)

$6^3 \equiv 7$  è una soluzione elementare

Sol. generale:  $x \equiv 3 \pmod{10}$

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

**Esercizio 4.**

Sia  $\mathbb{Z}_{19} = \{0, 1, 2, \dots, 18\}$  l'anello degli interi modulo 19. Consideriamo il polinomio

$$f(x) = (x^4 + 7x^2 + 1) \in \mathbb{Z}_{19}[x].$$

Trovare un polinomio  $g(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$  che moltiplicato per  $(9x^2 + 1) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$  dia  $f(x)$ , ovvero:

$$(x^4 + 7x^2 + 1) = (9x^2 + 1) \cdot g(x).$$

Scrivere la soluzione negli appositi spazi:

$$g(x) = \dots \underline{-2x^2 + 1} \quad (= \underline{17x^2 + 1}) \dots$$

Svolgimento:

Cerco  $a, b, c$  tali che

$$(9x^2 + 1)(ax^2 + bx + c) = x^4 + 7x^2 + 1$$

In particolare, confrontando i coefficienti di  $x^4$  ho

$$9a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \underline{-2}} \text{ (inverso di 9 mod 19)}$$

Confrontando i termini costanti ho

$$c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \underline{1}}$$

Confrontando i coefficienti di  $x$  ho

$$b = 0 \Rightarrow \boxed{b = \underline{0}}$$

Allora,  $g(x) = ax^2 + bx + c = \underline{-2x^2 + 1}$

Verifico che funziona:

$$(9x^2 + 1)(-2x^2 + 1) = \underline{-18x^4 - 2x^2 + 9x^2 + 1} = x^4 + 7x^2 + 1$$

Alternativa:

Divisione tra polinomi in  $\mathbb{Z}/(19)$ :

$$\begin{array}{r} x^4 + 0x^3 + 7x^2 + 0x + 1 \div 9x^2 + 1 = \boxed{-2x^2 + 1} \\ \underline{x^4 \phantom{+ 0x^3} - 2x^2} \phantom{+ 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} // \quad // \quad 9x^2 + 0x + 1 \\ \underline{9x^2 + 0x + 1} \\ // \quad // \quad // \end{array}$$

$\boxed{\text{resto zero}}$



si vede l'altra versione del  
compito per maggiori dettagli

**Compitino di MD**

19 Dicembre 2014

Cognome e nome: ..... — CORREZIONE — .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

**IMPORTANTE:** Scrivere la soluzione negli appositi spazi. Per lo svolgimento si può utilizzare se necessario anche il retro del foglio. **Non verranno valutati i fogli di brutta copia.** Non si possono usare libri, appunti, o dispositivi elettronici e non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. **Scrivere il nome su ciascun foglio.**

**Esercizio 1.**

Trovare tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} [i] & \left\{ \begin{array}{l} 7x \equiv 12 \pmod{33} \\ [ii] & \left\{ \begin{array}{l} 6x \equiv 9 \pmod{27} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Risposta:  $x \equiv \boxed{96} \pmod{\boxed{99}}$ .

Svolgimento:

Da [ii] semplifico un 3:

$$2x \equiv 3 \pmod{9} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{9} \quad [ia]$$

[i] equivale a

$$\begin{cases} 7x \equiv 12 \pmod{3} & \rightarrow x \equiv 0 \pmod{3} & [iia] \\ 7x \equiv 12 \pmod{11} & \rightarrow x \equiv 8 \pmod{11} & [iib] \end{cases}$$

[iia] è implicata da [ia]

$$\begin{cases} [ia] & \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 6 \pmod{9} \\ [iib] & \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 8 \pmod{11} \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow x \equiv 96 \pmod{99}$$

(questi sono entrambi  $-3$ )

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

**Esercizio 2.** Consideriamo la seguente equazione lineare diofantea dipendente dal parametro  $a \in \mathbb{Z}$ :

$$231 = ax + 99y.$$

Rispondere alle seguenti domande barrando la risposta giusta. Sotto ogni risposta scrivere una breve motivazione.

1. Per  $a = 66$  l'equazione ha soluzione.  Vero,  Falso.  
Motivazione:

$$33 = \text{mcd}(66, 99) \mid 231$$

2. Per  $a = 90$  l'equazione ha soluzione.  Vero,  Falso.  
Motivazione:

$$9 = \text{mcd}(90, 99) \nmid 231$$

3. Se  $a$  divide 165 l'equazione ha sempre soluzione.  Vero,  Falso.  
Motivazione:

$$\text{mcd}(a, 99) \mid \text{mcd}(165, 99) = 33, \text{ e } 33 \mid 231.$$

4. Se  $a$  divide 90 l'equazione ha sempre soluzione.  Vero,  Falso.  
Motivazione:

$$\text{Per } a = 90$$

$$\text{mcd}(90, 99) = 9 \nmid 231$$

(l'abbiamo fatto al punto 2!)

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

**Esercizio 3.**

Determinare tutte le soluzioni della congruenza  $6^x \equiv 3 \pmod{11}$

Risposta:  $x \equiv \boxed{2} \pmod{\boxed{10}}$ .

Svolgimento:

Tabella come nell'altra versione



Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

#### Esercizio 4.

Sia  $\mathbb{Z}_{19} = \{0, 1, 2, \dots, 18\}$  l'anello degli interi modulo 19. Consideriamo il polinomio

$$f(x) = (x^4 + 9x^2 + 5) \in \mathbb{Z}_{19}[x].$$

Trovare un polinomio  $g(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$  che moltiplicato per  $(3x^2 + 1) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$  dia  $f(x)$ , ovvero:

$$(x^4 + 9x^2 + 5) = (3x^2 + 1) \cdot g(x).$$

Scrivere la soluzione negli appositi spazi:

$$g(x) = \dots \underline{13x^2 + 5} \quad (= \underline{-6x^2 + 5}) \dots$$

Svolgimento:

Cerco  $a, b, c$

$$(\underline{3x^2 + 1})(ax^2 + bx + c) = x^4 + \underline{7x^2 + 5}$$

Confronto coeff.  $x^4$

$$\underline{3}a = \underline{1} \Rightarrow a = \underline{-6}$$

confronto termini noti

$$c = \underline{5}$$

confronto coeff.  $x$

$$b = \underline{0}$$

Verifico

$$(\underline{3x^2 + 1})(\underline{-6x^2 + 5}) = \underline{-18x^4 - 6x^2 + 15x^2 + 5} = x^4 + \underline{9x^2 + 5}$$

Alternative: Division in  $\mathbb{Z}/(19)$

$$x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 0x + 5 : 3x^2 + 1 = -6x^2 + 5$$

$x^4$		$-6x^2$	
$//$	$//$	$15x^2$	$+5$
		$15x^2$	$+5$
		$//$	$\textcircled{0}$