~~3°~~ 4° Compitino di MD
A.A. 2014/15 – 28 maggio 2015

Cognome e nome: – CORREZIONE COMPITO –

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: CORSO B, F. POLONI

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con la matita.

Esercizio 1. Sia
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Trovare il polinomio caratteristico di A. 8 punti

(b) La matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$? Su $\mathbb{C}$? Su $\mathbb{Z}_5$? 8 punti

(a) Usiamo la formula di Laplace sulla prima colonna:

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \det \begin{bmatrix} -x & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -x & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2-x \end{bmatrix} = -x \cdot \det \begin{bmatrix} -x & 0 & 2 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -2-x \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -2-x \end{bmatrix} =$$

$$= -x\left(x^2(-2-x)+2\right) - 1 \cdot 4 = x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = x^3(x+2) - 2(x+2) = \boxed{(x+2)(x^3-2)}$$

(Un modo alternativo di trovare la scomposizione è usare il "rational root theorem", provare $\pm 1, \pm 2$ e vedere che $p_A(-2) = 0$)

(b) Gli zeri di $p_A(x)$ sono: $\lambda_1 = -2$ (zero del primo fattore)

$\lambda_2 = \sqrt[3]{2}$

$\lambda_3 = \sqrt[3]{2}\,w$

$\lambda_4 = \sqrt[3]{2}\,w^2$,

dove $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ è una radice terza primitiva di 1 (zeri di $x^3 - 2$, cioè radici terze di 2).

$$p_A(x) = (x+2)^1 (x-\sqrt[3]{2})^1 (x-\sqrt[3]{2}w)(x-\sqrt[3]{2}w^2).$$

- su $\mathbb{R}$: due delle radici non sono reali, quindi $p_A(x)$ ha solo due radici di molteplicità algebrica 1 su $\mathbb{R}$. Le molt. geometriche sono al più 1 e 1, quindi non posso avere 4 autovettori indipendenti: $\boxed{\text{No}}$

- Su $\mathbb{C}$: Ho 4 autovalori distinti; ognuno ha $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = 1$, la matrice è diagonalizzabile. $\boxed{\text{Sì}}$

- Su $\mathbb{Z}_5$: $p_A(x) = (x+2)(x^3-2)$ resta valido, perché ottenuto da calcoli sugli interi (oppure possiamo ricavarlo di nuovo).

Radici di x^3-2 su $\mathbb{Z}_5$:

n	n^3-2 (mod 5)
0	-2
1	-1
2	1
$\boxed{3}$	$\boxed{0}$
4	2

L'unica radice è $3 \equiv -2$. Molteplicità algebrica: posso ottenerla dalla scomposizione $(x^3-2) = (x+2)(x^2-2x-1)$.

$$p_A(x) = (x+2)^2 \underbrace{(x^2-2x-1)}_{}$$ $\longrightarrow$ non ha radici in $\mathbb{Z}_5$

n	n^2-2n+1
0	-1
1	-2
2	-1
3	2
4	2

Alternativamente, calcolo

$$\ker(A+2I) = \ker\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tre pivot, $m_g(2) = 1$. $\boxed{\text{NON DIAGONALIZZABILE}}$

Esercizio 2. Sia

$$C = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice C è diagonalizzabile? 9 punti

(b) Per $a = -1$, si trovi una base **ortonormale** dell'autospazio $W = \{v \in \mathbb{R}^3 : Cv = v\}$. 7 punti

(a)

$$p_A(x) = \det(C - xI) = \det \begin{bmatrix} 2-x & a & 1 \\ 1 & a+1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{bmatrix} = (1-x)\det \begin{bmatrix} 2-x & a \\ 1 & a+1-x \end{bmatrix} =$$

$$= (1-x)\left((2-x)(a+1-x) - a\right) = (1-x)\left(x^2 - (a+3)x + a + 2\right)$$

(Usando Laplace sulla terza riga). Il secondo fattore ha radici $\lambda_{2,3} = \frac{a+3 \pm \sqrt{a^2+2a+1}}{2} = \begin{cases} a+2 \\ 1 \end{cases}$. Il primo fattore ha $\lambda_1 = 1$.

- Per $\underline{a \neq -1}$: devo vedere se $m_g(1) = 2$ ($m_g(a+2) = 1$ necessariamente).

$$\operatorname{Ker}(C - I) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ha dimensione 2 (un pivot).

$\boxed{\text{Per } a \neq -1 \text{, la matrice è diagonalizzabile}}$

- Per $\underline{a = -1}$, $a + 2 = 1$ e ho un solo autovalore.

$$\operatorname{Ker}(C - I) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ha dimensione 2.

(come sopra)

$$m_g(1) = 2 < 3 = m_a(1).$$

$\boxed{\text{Per } a = 1 \text{, la matrice } \underline{\text{non}} \text{ è diagonalizzabile}}$

b) L'autospazio W è lo spazio degli autovettori di autovalore 1.

$$W = \operatorname{Ker}(C - I) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{come sopra}}}{=} \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Pongo $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Sono una base di W, devo trasformarla in una base ortonormale. (Gram-Schmidt)

$$q_2 = v_2 - \frac{v_1^T v_2}{v_1^T v_1} v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w_2 = \frac{q_2}{\|q_2\|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Si può verificare che $w_1^T w_1 = 1$, $w_2^T w_2 = 1$, $w_1^T w_2 = 0$.

$$\boxed{\text{base o.n.: } \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.}$$

In alternativa, partendo da v_2, v_1 nell'ordine opposto si otteneva

$$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ e } \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$