1. Trova autovalori e autovettori delle seguenti matrici in $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Per ognuna, verifica che il determinante è uguale al prodotto degli autovalori (contati con la loro molteplicità algebrica) e la traccia è uguale alla somma degli autovalori (contati con la loro molteplicità algebrica). Quali di queste matrici sono diagonalizzabili?

2. Trova autovalori e autovettori delle seguenti matrici in $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ ($n =$ 2 oppure 3).

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}+3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Trova autovalori e autovettori di $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Verifica che $C = VDV^{-1}$, dove V è la matrice degli autovettori e D è la matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale.

4. Quali sono autovalori e autovettori di C^2? Di $C + 4I$? Di C^{-1}? (Non ricominciare da capo come se fosse una matrice nuova; c'è un modo più furbo di trovarli; riesci a vederlo?)

5. Mostra che il polinomio caratteristico di $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ è $p(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$.

Soluzioni

1. A_1 $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ (e suoi multipli diversi da 0 – questo vale per tutti gli autovettori che troveremo,non serve stare a dirlo), $\lambda_2 = 2$, $v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 3$, $v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

   A_2 $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $v_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 2$, $v_3 = \begin{bmatrix}11\\1\\3\end{bmatrix}$.

   A_3 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Gli unici autovettori sono i multipli (non nulli) di $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

   A_4 $\lambda_1 = 3$, $v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$; gli autovettori relativi a 0 sono tutti quelli della forma $\{\begin{bmatrix}-x_2 - x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix}, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli$\}$.

   A_1, A_2, A_4 sono diagonalizzabili, A_3 no. Una base di autovettori per A_4, per esempio, è $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

   B_1 $\lambda_1 = 1 + i$, $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\lambda_2 = \sqrt{2} + 3i$, $v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 0$, $v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

   B_2 $\lambda_1 = 2 + i$, $v_1 = \begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 2 - i$, $v_2 = \begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$.

2. $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 2$, $v_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 4$, $v_3 = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

3. C^2 corrisponde ad applicare due volte la matrice C, quindi i suoi autovalori sono i quadrati di quelli di C, cioè $0, 1, 9$, e i suoi autovettori sono gli stessi. $C + 4I$ corrisponde a moltiplicare un vettore per C e poi aggiungervi 4 volte sé stesso, quindi i suoi autovalori sono quelli di C, più quattro, cioè $5, 6, 8$. Difatti che $(C + 4I)v_i = (\lambda_i + 4)v_i$. Possono esserci altri autovalori? No, perché un polinomio di grado 3 ha al più tre radici distinte. Similmente, C^{-1} ha autovalori gli inversi di quelli di C. Possono esserci altri autovettori? No, perché non è possibile trovare più di tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$. (oppure, in alternativa, puoi usare la fattorizzazione $C = VDV^{-1}$ per ricavare $C^2 = VD^2V^{-1}$, $C + 4I = V(D + 4I)V^{-1}$ e $C^{-1} = VD^{-1}V^{-1}$).

4. Basta calcolare $\det(M - \lambda I)$ con uno dei metodi che abbiamo visto.