1. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & -1 \end{bmatrix}$. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ questa matrice è diagonalizzabile?

2. Per quali valori di a la matrice A qui sopra ha come autovalore $\frac{1}{2}$?

3. Per quali valori di a la matrice A qui sopra ha come autovettore $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$?

4. Sia $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$. Quanto vale $\lim_{k\to\infty} A^k v$? (Suggerimento: trova autovalori e autovettori di A).

5. Sia A una matrice 2×2 tale che $A^2 = A$. Quali possono essere gli autovalori di A? Trova esplicitamente esempi in cui A ha tutti i possibili autovalori.

6. Trova le tre radici cubiche di 8, cioè, le tre soluzioni complesse di $z^3 - 8 = 0$. E le radici cubiche di -8?

7. Descrivi le radici quinte di $1 + i$. Come sono disposte nel piano complesso?

8. Considera le radici 12-esime dell'unità. Per ognuna di esse ζ, qual è il minimo n tale che $\zeta^n = 1$? Quali di esse sono *primitive*, cioè non sono radici n-esime dell'unità per nessun altro $n < 12$?

9. Sia ω una radice terza dell'unità, e a un numero reale. Dimostra che $(a + \omega - \omega^2)(a - \omega + \omega^2)$ è reale, e poi calcolalo in funzione di a.

Soluzioni

(solo accennate)

1. $p_A(x) = \det \begin{bmatrix} 1-x & a \\ -a & -1-x \end{bmatrix} = (1-x)(-1-x) + a^2 = x^2 - 1 + a^2$, che ha soluzioni $x = \pm(1-a^2)$. Se $|a| < 1$, allora A ha due autovalori reali distinti ed è diagonalizzabile. Se $|a| > 1$, A ha due autovalori complessi distinti ed è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ (ma non su $\mathbb{R}$). Se $a = 1$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, che ha due autovalori pari a 0 ma un solo autovettore, e non è diagonalizzabile. Se $a = -1$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, che di nuovo non è diagonalizzabile.

2. Vogliamo che $\det \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2} & a \\ -a & -1-\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0$, che uccede per $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Vogliamo che $\begin{bmatrix} 1-\lambda & a \\ -a & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, ma non conosciamo λ (né a). Espandendo il prodotto, abbiamo
$$\begin{bmatrix} 2-2\lambda+a \\ -2a-1-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
che sono due equazioni nelle incognite a e λ. Viene $a = -\frac{4}{5}, \lambda = \frac{3}{5}$.

4. A ha autovettori $v_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ con autovalore $\lambda_1 = 1$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ con autovalore $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Abbiamo $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = v_1 - 0.2v_2$. Allora $A^k v 1^k v_1 + (-0.2)^k v_2$, il cui limite è proprio v_1.

5. Sia $Av = \lambda v$ una coppia autovalore-autovettore. Dev'essere $\lambda v = Av = A^2 v = \lambda^2 v$. Ma allora $\lambda = \lambda^2$, quindi $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$. Entrambi i valori sono possibili (es: $A = I$, $A = 0$).

6. Sono date da 2 volte le radici cubiche di 1.

7. Formano un pentagono inscritto in una circonferenza con centro l'origine.

8. Sia $\xi_{12} = \cos \frac{2\pi}{12} + i \sin \frac{2\pi}{12}$. Sono primitive $\xi, \xi^5, \xi^7, \xi^{11}$.

9. Dovrebbe venire $a^2 + 3$, utilizzando proprietà delle radici n-esime.