Prodotto matrice-vettore

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

solitamente indici vicini sono gli stessi

(1)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 1 \cdot x_1 = b_1 \\ -x_1 + x_2 = b_2 \\ -x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$$

Ci sono numeri x_1, x_2, x_3 tali che $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$?

Dalla prima equazione ricavo $x_1 = b_1$

Poi, dalla seconda, ricavo $x_2 = b_2 + x_1 = b_2 + b_1$

Poi, dalla terza, ricavo $x_3 = b_3 + x_2 = b_3 + b_2 + b_1$

Funzione in generale per le matrici triangolari inferiori

$$\begin{bmatrix} \boxed{\times} & 0 & 0 & 0 \\ \times & \boxed{\times} & 0 & 0 \\ \times & \times & \boxed{\times} & 0 \\ \times & \times & \times & \boxed{\times} \end{bmatrix}$$

← tutti zeri sopra la diagonale principale

$a_{ij} = 0$ se $j > i$

diagonale principale

Le soluzioni di (1) sono $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1+b_2 \\ b_1+b_2+b_3 \end{bmatrix} =$

Soluzioni si scrivono

come $x = M \cdot b$ $\qquad = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

Questa matrice M si chiama <u>inversa</u> di $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Si indica con A^{-1}

$Ax = b \qquad x = A^{-1} b$

Secondo caso

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Bx = b \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$-x_3 + x_1 = b_1$$
$$-x_1 + x_2 = b_2$$
$$-x_2 + x_3 = b_3$$

Se prendo per esempio $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x_3 = x_1$$
$$x_1 = x_2$$
$$x_2 = x_3$$

Ogni $x = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix}, \; c \in \mathbb{R}$

Se prendo $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$-x_3 + x_1 = 0$ $x_1 = x_3$

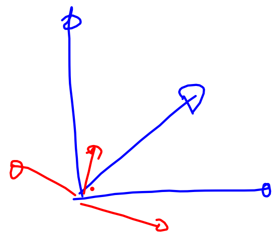
$-x_1 + x_2 = 0$ $x_1 = x_2$

$-x_2 + x_3 = 1$ impossibile se $x_1 = x_2 = x_3$

$Bx = b$, con $b =$, non ha soluzioni

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

non esiste una comb. lineare delle colonne che faccia b



$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ non ha sol.

In questo caso, con 3 vettori non genero tutto lo spazio

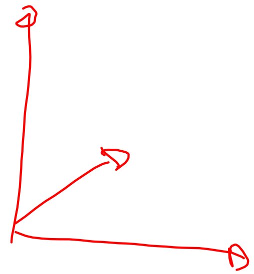
$c\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ formano una retta al variare di $c \in \mathbb{R}$

$c\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ formano un piano al variare di $c,d \in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ sta nel piano generato da $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

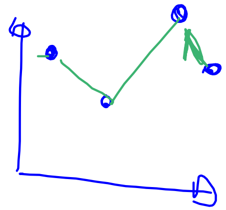
$$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$c\begin{bmatrix}x\\x\\0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}x\\x\\0\end{bmatrix} + e\begin{bmatrix}x\\x\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\\ \\0\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

ha soluzioni se e solo se



$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\2\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\5\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\7\\-6\end{bmatrix}$$

Se $b_1+b_2+b_3=0$, ci sono soluzioni

Per ogni b fissato, se x è soluzione $x+\begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix}$ è soluzione

per ogni $c\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = b_1 \\ -x_1 + x_2 = b_2 \\ -x_2 + x_3 = \underline{b_3} \end{cases}$$

sommando, ottengo $-x_2+x_3=\underline{-b_1-b_2}$

Riesco ad ottenere la terza equazione dalle prime due:

$x_1-x_3=b_1$ $-x_1+x_2=b_2$, allora $\cancel{x_1}-x_3-\cancel{x_1}+x_2=b_1+b_2$

A invertibile

$Ax=b$

→ esiste soluzione x per ogni b

→ x unica

→ esiste $\boxed{A^{-1}}$, e $x = A^{-1}b$

A singolare

→ esiste una colonna che si scrive come comb. lineare delle altre

→ esiste un'equazione le cui incognite si ottengono sommando le altre

→ Per qualche b, infinite sol.

Per qualche b, nessuna

Eliminazione di Gauss

$$\begin{array}{c} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Se sommo (a) e (b),

$$2x_1+4x_2-2x_3+4x_1+9x_2-3x_3 = 2+8$$

$$2(2x_1+4x_2-2x_3)+5(4x_1+9x_2-3x_3) = 2\cdot 2+5\cdot 8$$

$$(b)-2(a): \quad \cancel{4x_1}+9x_2-3x_3-2(\cancel{2x_1}+4x_2-2x_3) = 8-2\cdot 2$$

$$x_2+x_3 = 4$$

$$\begin{array}{c} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{(b) \to (b) - 2(a)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(c) \to (c) + (a)} \begin{array}{c} (a) \\ (b') \\ (c') \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{(c') - (b')} \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

pivot

sostituzione all'indietro
back-substitution

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(*) $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$

$x_2 + x_3 = 4 \rightarrow 2 = x_2$

$4x_3 = 8 \rightarrow 2 = x_3$

(*) $2x_1 = 2 - 4x_2 + 2x_3 = 2 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = -2 \qquad x_1 = -1$

feb 26-12:25

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ b+3a \\ c+2a \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a \\ b' \\ c' \end{array} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ c' - \frac{5}{7} b' \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 9 - \frac{5}{7} \cdot 11 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 12 - \frac{5}{7} \cdot 11 \end{bmatrix}$$

feb 26-12:29

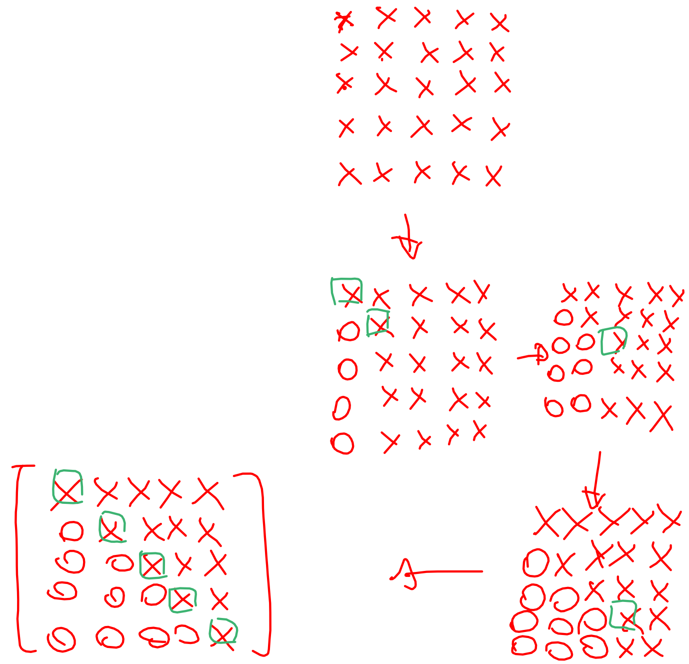
$$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&4&5\\2&3&5\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

Cosa può andare storto?

0 in posizione di pivot

Posso scambiare righe!

$$\begin{bmatrix}3&4&5\\0&1&2\\2&3&5\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} a \\ b-a \\ c-a \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 2 \end{bmatrix}$$

non riesco a trovare pivot non nulli

problema non eliminabile...

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \leftarrow$$

$\underline{0 \cdot x_2} + 1 x_3 = 3$

$x_3 = \cancel{\frac{4}{2}}$

$$\dots = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \qquad (b) \to (b) - 2(a) \qquad \dots = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

matrice di eliminazione

Un passo di eliminazione di Gauss =
= applicare una matrice di eliminazione non solo a b, ma a tutte le colonne della matrice A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_3 \end{bmatrix}$$

feb 26-12:48

feb 26-12:52