RECAP:

PRODOTTO MATRICE - MATRICE

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{19}^{1\cdot 5+2\cdot 7} & \overbrace{22}^{1\cdot 6+2\cdot 8} \\ \boxed{} & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{c:c} A & b \end{array}\right] \text{ MATRICE ESTESA}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} x & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & x \end{array}\right]$$

soluzione x di Ax=b

Se devo risolvere $Ax_1 = b_1$, $Ax_2 = b_2$, $Ax_3 = b_3$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} A & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

Passi di eliminazione di Gauss $\Leftrightarrow$ moltiplicazione a sinistra per matrici di eliminazione $\begin{bmatrix} 1 & & \\ x & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & x & 1 \end{bmatrix}$

$$E_k \cdots E_2 E_1 \left[\begin{array}{c|ccc} A & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

Matrici inverse con Gauss-Jordan

$$\underbrace{E_k E_{k-1} \cdots E_1}_{S} \left[\underbrace{\begin{matrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{matrix}}_{A} \ \vdots \ \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right] = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \ \vdots \ \underbrace{\begin{matrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{matrix}}_{D}\right]$$

Si ha $A \cdot D = I$ Perché?

Prima colonna di D = soluzione $Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A \cdot \begin{bmatrix} \boxed{x_1} & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Facendo Gauss-Jordan, abbiamo costruito anche una matrice S tale che $S \cdot A = I$: è il prodotto degli E_i

$$E_1 [A \,\vdots\, I] = [\,B\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \end{array}\right]$$

$$E_2 B = C = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \end{array}\right]$$

$$E_3 C = D = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x \end{array}\right]$$

$$\underbrace{E_3 \underbrace{E_2 \underbrace{E_1 [A \,\vdots\, I]}_{B}}_{C}}_{D} = D$$

Teorema: $S = D$

$$\begin{matrix} \boxed{X} & X & X \\ O & O & X \\ O & O & \boxed{X} \end{matrix}$$

Dim: $D = I \cdot D = (\underbrace{SA}_{I})D = S(\underbrace{AD}_{I}) = S \cdot I = S$

Teorema: Se facendo l'eliminazione di Gauss ottengo valori non-zero sulla diagonale (pivot), allora esiste una matrice, che chiamo A^{-1}, tale che

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

(Per ogni A matrice quadrata)

Abbiamo già incontrato un' inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Avevamo detto che la soluzione di $Ax = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, per ogni $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$, era

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 + b_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se so un' inversa di A, la soluzione di $Ax=b$ è data da $x=A^{-1}b$

Dim: $x = \underbrace{A^{-1}A}_{I}x = A^{-1}b$

Teorema: di inversa ce n'è solo una (quando c'è)

Dim: Siano B, C due inverse

$$C = I \cdot C = (BA)C = B(AC) = B \cdot I = B$$

$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ se a, b reali

Per le matrici, vale: se A, B invertibili

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(e in particolare, AB è invertibile)

<u>dim:</u> C^{-1} è l'inversa di $C \Leftrightarrow CC^{-1} = C^{-1}C = I$

Verifichiamolo:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(\overbrace{BB^{-1}}^{I})A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \ldots$

Quelche esempio di inverse....

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = ?$$

Gauss-Jordan!

$$\begin{array}{c} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(b)-5(a)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} (a) \\ (b') = (b) - 5(a) \\ (c) \end{matrix} \qquad (b) = (b') + 5(a)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

L'inversa di P è P stessa $P \cdot P = I$ (verificatelo!)

Esercizi Trova l'inversa di:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tutto questo l'abbiamo fatto per numeri reali (razionali), ma funziona genericamente per matrici/vettori con elementi in un campo reali, razionali, interi modulo un primo ($\mathbb{Z}_p$)

Per esempio, trova x_1, x_2 interi tali che

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \equiv 1 \pmod 5 \\ -x_1 + 2x_2 \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$$

(uguaglianza in $\mathbb{Z}_5$)

Gauss-Jordan funziona anche in $\mathbb{Z}_5$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(b)+3(a)]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(a)-(b)} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-(b)]{3\cdot(a)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

inversa (in $\mathbb{Z}_5$)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora la sol. di $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$

$$x = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ci sono matrici invertibili in $\mathbb{R}$
ma non in tutti gli $\mathbb{Z}_p$

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 1 \end{array}\right]$$ pivot non-nulli, invertibile in $\mathbb{R}$

in $\mathbb{Z}_2$, $\hookrightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 1 \end{array}\right]$ non invertibile

Spazi vettoriali

Uno spazio vettoriale reale è un insieme di oggetti che potete sommare e moltiplicare per un numero reale

Uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ è un insieme di oggetti che potete sommare e moltiplicare per numeri di $\mathbb{K}$

mar 5-12:11

+ proprietà:

- $(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall\, u,v,w \in V$
- $c(dv) = (cd)v \quad \forall\, c,d \in \mathbb{K},\ v \in V$
- $c(u+v) = cu + cv$
- in V c'è un vettore particolare, $\underline{0}$, tale che $0 \cdot v = \underline{0}$ per ogni $v \in V$

Esempi di spazi vettoriali

- $\mathbb{R}^n$ = vettori di n numeri reali in colonna, $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$

- $(\mathbb{Z}_5)^n$ = vettori di classi di resto modulo 5

- numeri reali! $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$

- Lo spazio vettoriale più semplice: $\{0\}$

mar 5-12:19

- polinomi:

$$3.5\left(1+2x+5x^5\right)+\left(100x^7+23\right)$$

- polinomi di grado $\leq n$

$$a+bx+cx^2$$

Perché non va bene polinomi di grado esattamente 2?

$$\underbrace{\left(-1+x^2\right)}_{\text{grado } 2}+\underbrace{\left(-5+10x-x^2\right)}_{\text{grado } 2}=\underbrace{-6+10x}_{\text{non più grado } 2!}$$

mar 5-12:22

- funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ $\qquad \underline{0} = f : x \mapsto 0$

se ho $f : x \mapsto f(x)$

$f \quad x \mapsto x^2 + \cos(x)$ $\qquad 3f : x \mapsto 3x^2 + 3\cos(x)$

$g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se non lo è} \end{cases}$

Posso fare $f + g$

- matrici $Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$

$4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sottospazi vettoriali

È un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale V che è anche lui uno spazio vettoriale

(*) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ (piano $z=0$)

Per verificare che $S \subseteq V$ sia un sottospazio vettoriale, devo verificare che (I) $u+v \in S$ per ogni $u, v \in S$

e che (II) $c \cdot u \in S$ per ogni $c \in \mathbb{K}, u \in S$

(II) automaticamente implica $\underline{0} \in S$

Per verificare che $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$

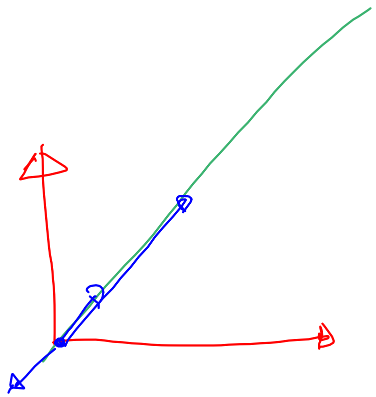
sia un s.s.v. di $\mathbb{R}^3$, basta verificare che

(i) $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ii) $c \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Esempi

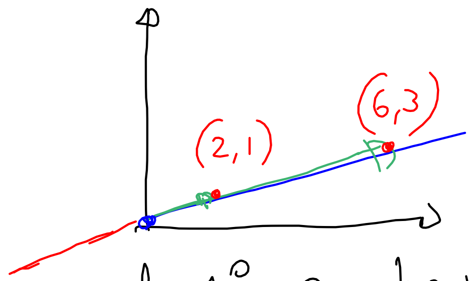
- Rette in $\mathbb{R}^2$
(per l'origine)



mar 5-12:35

• piani in $\mathbb{R}^3$ (o rette, ...)

<u>Non-esempi</u>:

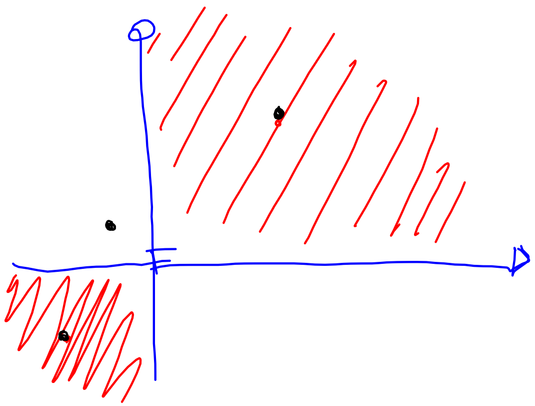


Solo il pezzo nel 1° quadrante di una retta

(i) vera

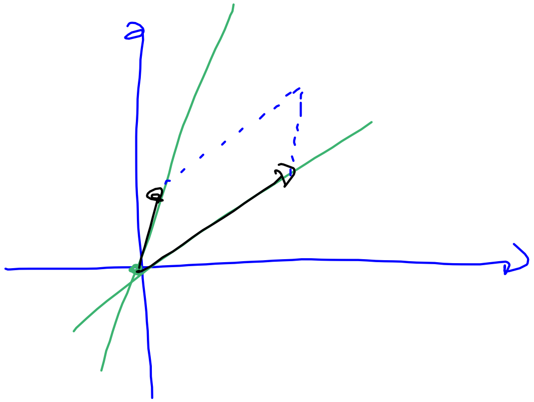
(ii) falsa $\quad (-1)\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$ no!

mar 5-12:38



1° e ~~4°~~ 3° quadrante: no!

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Unione di 2 rette

In generale, l'unione di due sottospazi <u>non</u> è un sottospazio

Se un sottospazio contiene $u, v \in V$ deve contenere tutte le loro combinazioni lineari:

$$\{cu + dv : c, d \in \mathbb{K}\}$$

- Esempio: dati $u, v, w \in V$, l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari <u>è</u> un sottospazio vettoriale

$$S = \{cu + dv + ew : c, d, e \in \mathbb{K}\}$$

(i) $(c_1 u + d_1 v + e_1 w) + (c_2 u + d_2 v + e_2 w) = (c_1 + c_2) u + (d_1 + d_2) v + (e_1 + e_2) w$

(ii) $a(cu + dv + ew) = (ac) u + (ad) v + (ae) w$

Dati $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\} \subseteq V$ l'insieme delle loro comb. lineari è un sottospazio di V

E si chiama <u>span</u>$(v_1, v_2, \dots v_n)$

<u>Esempio</u>: lo span di $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ è $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\}$

lo span $\left\{\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}\right\}$

<u>Es</u>: Verifica che le matrici triangolari superiori $\begin{bmatrix}a & b\\0 & c\end{bmatrix}$ sono un sottospazio di $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$

<u>Es</u>: Verifica che i polinomi tali che $p(0)=0$ sono un sottospazio dell'insieme dei polinomi

mar 5-12:50