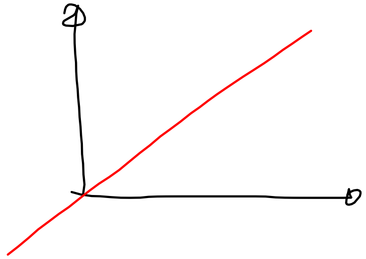
Spazio vettoriale:

insieme di oggetti che posso <u>sommare</u> e moltiplicare per un numero reale (oppure genericamente in un <u>campo</u>: $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$)

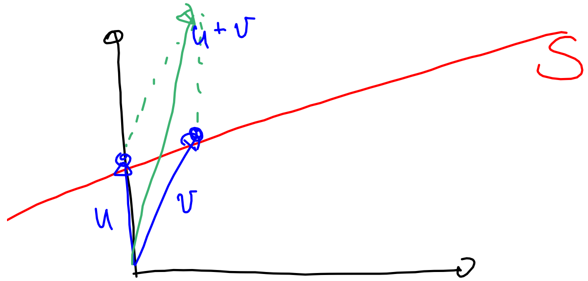
<u>Sottospazio vettoriale</u>

sottoinsieme di uno s.v. che è a sua volta uno s.v.



Es: retta (per l'origine) in un piano, retta o piano per l'origine in $\mathbb{R}^3$

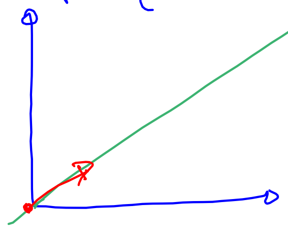
$S \subseteq V$ è un sottospazio $\iff$
$$u+v \in S \quad \forall u,v \in S$$
$$cu \in S \quad \forall u \in S,\ c \in \mathbb{K}$$

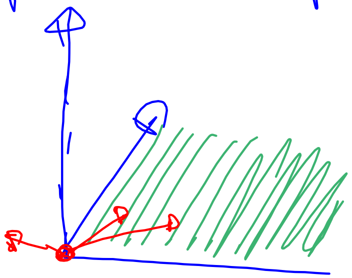


$u+v \notin S$ quindi una retta non per l'origine non è un sottospazio

Dati $u_1, u_2, \dots u_k \in S$, l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari è sempre un sottospazio, si chiama

span$\{u_1, u_2, \dots u_k\}$





Span di $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$ è tutta la retta $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$: $2x-y=0$

$\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-5\\-10\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

Data una matrice, lo span delle sue colonne si chiama <u>spazio delle colonne</u>, oppure <u>immagine</u>

im A, oppure ran A (da "range")

$$\operatorname{Im} A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ al variare di } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} x_3$$

prodotto matrice-vettore
$\Leftrightarrow$ comb. lineare delle colonne

mar 10-14:16

Un altro sottospazio vettoriale è il nucleo o kernel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

di una matrice A, Ker A

$\operatorname{Ker} A = \{ v : Av = \underline{0} \}$

Se $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Ker} A \subseteq \mathbb{R}^n$

(il prodotto $m \times n$ $n \times 1$ ha senso)

Verifichiamo che Ker A è un sottospazio vettoriale

1) • se $u, v \in \operatorname{Ker} A$, allora $u+v \in \operatorname{Ker} A$

2) • se $u \in \operatorname{Ker} A$, $c \in \mathbb{K}$, $cu \in \operatorname{Ker} A$

dim. di 1): $u, v \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow Au = 0$, $Av = 0$, ma allora $A(u+v) = 0$

$\Updownarrow$

$u+v \in \operatorname{Ker} A$

2) $u \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow Au = 0$, ma allora $0 = c(Au) = A(cu)$, quindi $cu \in \operatorname{Ker} A$

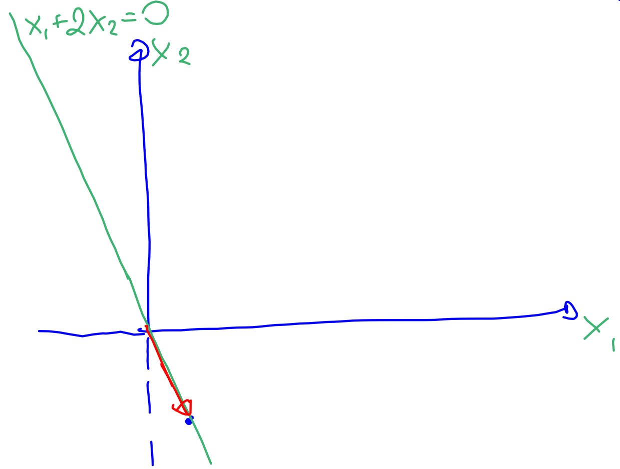
$$c\begin{bmatrix} a_{11}v_1+a_{12}v_2+\dots+a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1+a_{22}v_2+\dots+a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1+\dots+a_{mn}v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(cv_1)+a_{12}(cv_2)+\dots+a_{1n}(cv_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(cv_1)+\dots+a_{mn}(cv_n)\end{bmatrix}$$

$$\underset{c(Av)}{\parallel} \qquad\qquad \underset{A(cv)}{\parallel}$$

Es: $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0 \iff \begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ 3x_1+6x_2=0\end{cases}$

La seconda eq. è la prima moltiplicata per 3, è superflua

$$\ker A=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} : x_1+2x_2=0\right\}=\left\{c\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} : c\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right)$$



Anche un'equazione del tipo $x+2y+z=0$ corrisponde al kernel di una matrice:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ t.c. } x+2y+z=0 \right\} = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

Come si calcola il Ker di una matrice data?

Come si trovano <u>tutte</u> le soluzioni di $Ax=0$

$$\operatorname{Ker} \underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}} = \left\{ x, y, z \text{ t.c. } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0, \text{ cioè } x+2y+z=0 \right\}$$

$$\operatorname{Ker} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \left\{ x \text{ t.c. } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x = 0, \text{ cioè } \begin{matrix} x=0 \\ 2x=0 \\ x=0 \end{matrix} \right\} = \{0\}$$

Variante dell'eliminazione di Gauss

$$\begin{array}{c} (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} (a) \\ (b)-2(a) \\ (c)-3(a) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (a') \\ (b') \\ (c') \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} (a') \\ (b') \\ (c')-(b') \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso più grosso:

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

forma a scala

tutti: "gradini" sono alti 1

(row) echelon form

Gli elementi per cui dovete dividere sono tutti e soli gli "angoli" dei gradini (pivot) (in verde)

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} (a)-\frac{1}{2}(b) \\ (b) \\ (c) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alla fine, ottengo una forma a scala in cui i pivot contengono uni, e sopra di essi ci sono zeri.

Questa si chiama forma a scala ridotta

Ora le equazioni sono diventate

$$(*) \quad 0 = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{x_1} \\ x_2 \\ \boxed{x_3} \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_4 \\ x_3 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ \end{matrix}$$

x_1, x_3 sono associati a colonne dove ci sono pivot

x_2, x_4 sono "variabili libere"

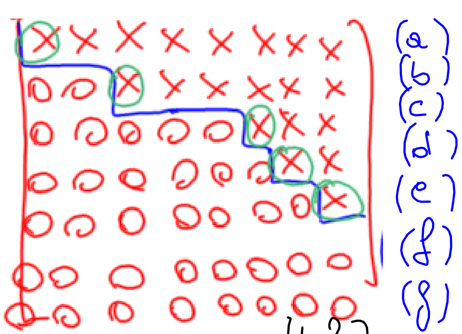
Per ottenere soluzioni di $(*)$, posso scegliere come mi pare le variabili libere (x_2, x_4)

$x_2 = 13$

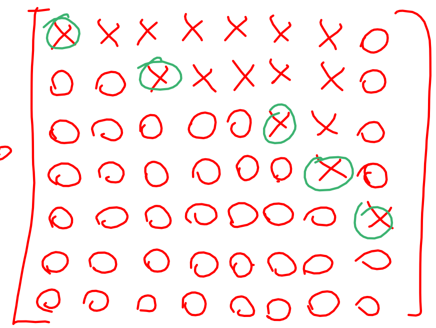
$x_4 - 2/3$

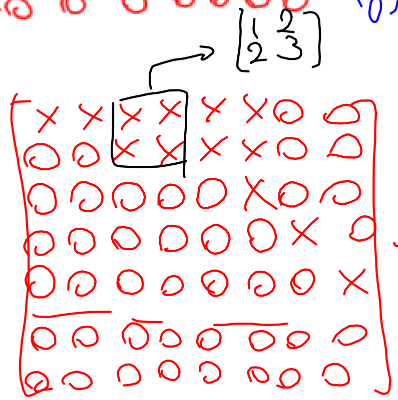
Poi, uso le equazioni per ricavare le variabili associate ai pivot

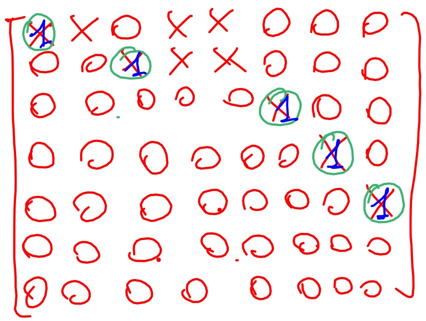
Da (a), ricavo $x_1 = -x_2 - x_4 = -13 + 2/3 = \ldots$ Da (b), ricavo $x_3 = -x_4 = \frac{2}{3}$



sommo multipli di (e) ad (a), (b), (c), (d)







riesco ad ottenere zeri sopra i pivot (non dappertutto) e 1 nei pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & X & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{pivot} \\ \text{libere} \\ \text{pivot} \\ \text{libera} \\ \text{libera} \\ \text{pivot} \\ \text{pivot} \\ \text{pivot} \end{array}$$

posso scegliere arbitrariamente le variabili libere, ricavo quelle con i pivot

Con questo metodo si trova Ker di qualunque matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

x_2, x_3 a piacere

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - 2x_3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Posso scegliere x_1, x_2 arbitrariamente

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = 0$$

x_2 scelto a piacere

$x_1 = -2x_2$ $\quad \begin{bmatrix}-2c\\ c\end{bmatrix}$

multipli di $c\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$

Se io scelgo come variabili libere in tutti i modi possibili un 1 e tutti gli altri zeri, ottengo soluzioni "speciali"

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Scelgo una volta $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, e una volta $x_2 = 0$, $x_4 = 1$

ottengo due soluzioni speciali $s_1 = \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ e $s_2 = \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$

Posso ottenere ogni altra sol. come combinazione lineare di queste due:

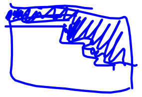
$$\begin{bmatrix}*\\ c\\ *\\ d\end{bmatrix} = \underbrace{c\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}}_{\text{questo sta in Ker A}}$$

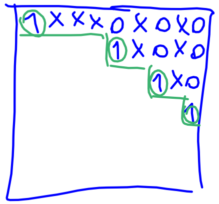
questo sta in Ker A (perché $s_1, s_2 \in \operatorname{Ker} A$ e Ker A è un sottospazio)

Anche x_1, x_3 devono coincidere perché fissati x_2, x_4, x_1 e x_3 sono univocamente determinati

Quindi, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\{\text{soluzioni speciali}\}$

Dato S sottospazio "presentato" come $\operatorname{Ker} A$, per passare a una presentazione come $S = \operatorname{span}\{s_1, s_2, \dots s_e\}$ devo:

1) riduco A in forma a scala 

2) riduco in forma a scala ridotta 

$= R$

3) calcolo soluzioni speciali di $Rx = 0$, scegliendo come variabili libere tutti zeri e un 1 in tutti i modi possibili

4) $S = \operatorname{span}\{\text{soluzioni speciali}\}$

In particolare, se ho più incognite che equazioni

$$m\left\{\underbrace{\boxed{\qquad\qquad\qquad}}_{n}\right. \qquad m<n$$

C'è almeno una variabile libera
(perché? Al massimo ho un pivot su ogni riga, ma ho più colonne che righe, quindi mi avanza per forza una colonna libera)

Quindi, c'è almeno una soluzione non nulla di $A \cdot x = 0$
(diversa da $\underline{0}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Soluzione generale di $Ax=b$, con $b \neq 0$

1) Scrivo la matrice aumentata $\left[A \,\vdots\, b\right]$

2) riduco a scala ridotta A, e applico le stesse op. a b

$$\underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}} \underset{4\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & r_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_3 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

3) Se ho righe nulle in $R=$ (A in forma a scala ridotta), allora devo avere zeri anche nel termine noto "ridotto", altrimenti il sistema è impossibile.

4) Scelgo arbitrariamente le variabili libere, e ricavo le variabili associate ai pivot delle equazioni rimanenti