Definizione: $v_1, v_2, \dots v_k$ si dicono linearmente dipendenti se uno di essi si scrive come combinazione lineare degli altri

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2v_1 + 3v_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2v_1 + 3v_2 = v_3 \iff v_1 = \frac{1}{2}(v_3 - 3v_2) \qquad 2v_1 + 3v_2 - v_3 = 0$$

Equivalentemente se esistono $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ non tutti nulli tali che $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = 0$

Se scrivo la matrice A che ha i v_i per colonne,

$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_k \end{bmatrix}$, questo equivale a dire che $A \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = 0$

non ha solo la soluzione $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$

Se uno dei vettori, ad es. v_2, è $\underline{0}$ allora sono sempre lin. dip. $0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot \dots = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Equivalentemente, se riducendo A in forma a scala non ho variabili libere

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 8 \\ 0 & \boxed{-3} & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

una variabile libera ⇒ tante soluzioni

$$Ax = \underline{0} \qquad \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} \times & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxed{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

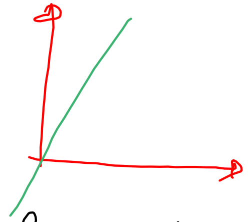
Per esempio, scelgo $x_3 = -1$

(2) $x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$

(1) $x_1 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ è sol. di $Ax = 0$

In generale, le colonne di una matrice sono lin. indipendenti se e solo se riducendola a scala <u>non</u> ho variabili libere



$v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ lin. ind. (da solo)

$v_2 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

$$A = [v_1\ v_2] = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}$$ lin. ind.

$v_3 = \begin{bmatrix}342\\976\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 342\\2 & 3 & 976\end{bmatrix}$$ le colonne sono sempre dipendenti
→ non ho abbastanza pivot

(se A ha meno righe che colonne, $Ax=0$ ha sempre soluzione)

Se $v_3 = cv_1 + dv_2$, tutti i vettori che genero come

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3(cv_1 + dv_2)$$

li genero anche come comb. lineari dei soli v_1, v_2

Base di uno spazio vettoriale V:
è un insieme di vettori $\{v_1, v_2, \dots v_k\}$ tali che:
1) sono linearmente indipendenti
2) generano V, cioè $\mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots v_k\}$

Base canonica (o standard) di $\mathbb{R}^n$: è la base fatta dai vettori con un 1 e tutto il resto 0

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

es: $\mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

Dim. che è una base: 1) lin. indip.: una comb. lineare è

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \dots + x_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}}$$

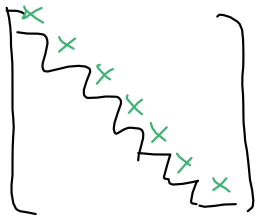
quand'è che $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = 0$?

Quando sono tutti zeri....

2) generano $\mathbb{R}^n$: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\\vdots\\17\end{bmatrix}$

Le colonne di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono una base se e solo se A è invertibile:

<u>dim</u>: dopo elim. di Gauss, pivot sulla diagonale



1) Le colonne di A sono lin. indip. perché non ho variabili libere

2) Posso scrivere ogni $b \in \mathbb{R}^n$ come

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = b,$$

dove v_j sono le colonne di A?

$$= A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ il sistema lin $Ax = b$ ha sol. per ogni b?

<u>Sì</u> perché A invertibile

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $V = \text{span}\{v_1, v_2\}$

v_1, v_2 sono lin. ind? $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ si

v_1, v_2 sono una base di V.

L'equazione $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ ha soluzione per ogni b? No, solo per $b \in V$.

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Cosa succede se ho $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non invertibile?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

il suo column space non è tutto $\mathbb{R}^3$, ma un certo sottospazio $\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\right\}$

Dato V = column space di A, come faccio a trovare una base?

<u>Teorema</u>: Data $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, se i pivot stanno nelle colonne $c_1, c_2, \dots c_k$, <u>allora</u> le colonne $c_1, c_2, \dots c_k$ di A sono una base di $\operatorname{im} A$

<u>Dim</u>: Consideriamo A e la matrice R ottenuta riducendo A in forma a scala ridotta

$$A = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le soluzioni di $Ax=0$ e di $Rx=0$ sono le stesse

1) sono linearmente indipendenti? Cioè, esiste una soluzione di

$$x_{c_1}v_{c_1}+x_{c_2}v_{c_2}+\dots+x_{c_n}v_{c_n}=0$$ diversa da quella banale?

Cioè se prendo solo le colonne $c_1, c_2, \dots c_n$ e le riduco a scala, ho variabili libere? È lo stesso conto che non ridurre a scala A e "dimenticarsi" delle colonne senza pivot.

Se ignorate le colonne senza pivot, vi resta un pivot per colonna.

2) Le colonne dove stanno i pivot generano $\mathrm{Im}\, A$?

Vediamolo prima per R:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \times & 0 & \boxed{\times} \\ 0 & 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{matrix} \end{array}$$

Riesco a generare r_2 come comb. lin. di r_1 e r_3? sì (basta r_1)

Riesco a generare r_4? Sì, basta prendere $\boxed{\times} r_1 + \times r_3$

Data qualunque forma a scala, in generale
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 1 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le colonne di R dove stanno i pivot generano $\mathrm{Im}\, R$

mar 12-12:04

La stessa cosa succede per A, perché
"r_4 è generato come comb. lin. di r_1 e r_3" vuol dire che
esistono x_1, x_3 tali che $x_1 r_1 + 0 r_2 + x_3 r_3 - r_4 = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad R \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Ma $Rx=0$ e $Ax=0$ hanno le stesse soluzioni!

Quindi $A \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 - v_4 = 0$

la stessa cosa vale per le colonne di A.

E questo vale in generale.

Occhio: $\mathrm{Im}\, A \neq \mathrm{Im}\, R$ (in generale)

Es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

base di $\operatorname{Im} A$

Come faccio a trovare una base di $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, \dots v_{17}\}$

Faccio la matrice $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{17} \end{bmatrix}$, riduco a scala, e vedo dove sono i pivot

ES: $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

base di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$

ES: polinomi di grado ≤ 2 (a coefficienti reali)

$$a + bx + cx^2 = a p_1(x) + b p_2(x) + c p_3(x)$$

base = $p_1(x) = 1 \quad p_2(x) = x \quad p_3(x) = x^2$

Oss: Data una base $v_1, v_2, \dots v_K$ di V, ogni elemento si scrive in modo unico come

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + \dots + x_K v_K$$

Dato v, sono univocamente determinati $x_1, x_2, \dots x_K$

Dim: Supponiamo che ce ne siano due diversi

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_K v_K$$
$$\parallel$$
$$v = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_K v_K$$

Allora $0 = v - v = (x_1 v_1 + \dots + x_K v_K) - (y_1 v_1 + \dots + y_K v_K) =$

$$= (x_1 - y_1) v_1 + (x_2 - y_2) v_2 + \dots + (x_K - y_K) v_K \quad (*)$$

(*) è una combinazione lineare degli elementi di v che fa 0

Ma gli elementi di una base sono lin. indipendenti

L'unica possibilità è se $x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 0$, ... $x_K - y_K = 0$ $\square$

Teo: tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi

→ se esiste almeno una base (con un numero finito di elementi)

$\{v_1, v_2, \dots v_n\}$, $\{w_1, w_2, \dots w_m\}$

I w_i sono tutti elementi di V, quindi ogni w si scrive come comb. lineare dei v

$$w_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{n1} v_n = V \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

$$w_2 = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{n2} v_n = V \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$w_m = a_{1m} v_1 + a_{2m} v_2 + \dots + a_{nm} v_n$$

dove V è la matrice con colonne $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$

$$w_1 = V \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \qquad w_2 = V \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}$$

$$w_3 = V \cdot \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{bmatrix} \quad \dots \quad w_m = V \begin{bmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

Se W è la matrice che ha i w come colonne, avete

$$W = V \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$m > n$

$W = VA$ Se A è più larga che alta, esiste $x \neq 0$ tale che $Ax = 0$

Allora si avrebbe $Wx = VAx = 0$

Cioè $x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m = 0$ impossibile perché i w_i devono essere lin. indipendenti

$\Rightarrow$ $m > n$ è impossibile

$n > m$ è impossibile (scombio v e w e ricomincio)

L'unica possibilità è $\boxed{n = m}$

$\square$