Trovare l'inversa di

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&5&6\\0&0&7&8\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&0&0&0\\3&4&0&0&0&1&0&0\\0&0&5&6&0&0&1&0\\0&0&7&8&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{(2)-3(1)}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&0&0&0\\0&-2&0&0&-3&1&0&0\\0&0&5&6&0&0&1&0\\0&0&7&8&0&0&0&1\end{array}\right]\longrightarrow$$

$$(4)-\frac{7}{5}(3)$$

$$8-\frac{7}{5}\cdot 6=\frac{40-42}{5}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&0&0&0\\0&-2&0&0&-3&1&0&0\\0&0&5&6&0&0&1&0\\0&0&0&\boxed{-2/5}&0&0&-7/5&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&0&0&0\\0&-2&0&0&-3&1&0&0\\0&0&5&0&0&0&\boxed{-20}&15\\0&0&0&-2/5&0&0&-7/5&1\end{array}\right]$$

$$(3)+15(4)$$

$$1+\cancel{15}^{\,3}\left(-\frac{7}{\cancel{5}}\right)=1-21=-20$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-2&1&0&0\\0&-2&0&0&-3&1&0&0\\0&0&5&0&0&0&-20&15\\0&0&0&-2/5&0&0&-7/5&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-2&1&0&0\\0&1&0&0&3/2&-1/2&0&0\\0&0&1&0&0&0&-4&+3\\0&0&0&1&0&0&7/2&-5/2\end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1&0&0\\3/2&-1/2&0&0\\0&0&-4&+3\\0&0&7/2&-5/2\end{bmatrix}$$

$A \cdot A^{-1}$ dovrebbe fare I

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 7/2 & -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{4} \times 4$ $\qquad$ $4 \times \underline{4}$ $\qquad$ 4×4

Es Trovare l'inverse di

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{bmatrix}$$

Sol:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&0&0&1&1&0&0&0\\0&0&2&0&0&1&0&0\\0&3&0&0&0&0&1&0\\4&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right] \to \begin{array}{c}(4)\\ \\ \\(1)\end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc}4&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&2&0&0&1&0&0\\0&3&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&0&0&0\end{array}\right] \to$$

$$\to \begin{array}{c} \\(3)\\(2)\\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|cccc}4&0&0&0&0&0&0&1\\0&3&0&0&0&0&1&0\\0&0&2&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1/4\\0&1&0&0&0&0&1/3&0\\0&0&1&0&0&1/2&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0\end{array}\right] \; A^{-1}$$

Verifichiamo:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0&1/4\\0&0&1/3&0\\0&1/2&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

ok!

Trovare l'inversa $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

P = matrice di permutazione $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_1 \end{bmatrix}$

Vi avevo detto di verificare è che $P^3 = I$

Qual è l'inversa di P? $P \cdot Q = Q \cdot P = I$

$P \cdot P^2 = P^2 \cdot P = I \qquad P^{-1} = P^2$

mar 17-14:34

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ è invertibile?

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a-1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)+\frac{1}{a-1}(1)} \left[\begin{array}{cc|cc} a-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{2a-3}{a-1}} & -\frac{1}{a-1} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$2-\frac{1}{a-1}\cdot 1 = \frac{2a-2-1}{a-1} = \frac{2a-3}{a-1}$$

$$1-\frac{\cancel{a-1}}{2a-3}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{a-1}}\right) = \frac{2a-3+1}{2a-3} = \frac{2a-2}{2a-3}$$

$$\xrightarrow{(1)-\frac{a-1}{2a-3}(2)} \left[\begin{array}{cc|cc} a-1 & 0 & \boxed{\frac{2a-2}{2a-3}} & -\frac{a-1}{2a-3} \\ 0 & \frac{2a-3}{a-1} & -\frac{1}{a-1} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{2a-3} & -\frac{1}{2a-3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2a-3} & \frac{a-1}{2a-3} \end{array}\right]$$

$$A^{-1}$$

Funziona se $a-1 \neq 0$, $2a-3 \neq 0$

E se $a=1$ o $a=3/2$?

Se $\boxed{a=1}$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 pivot non nulli, invertibile

$\Rightarrow$ La matrice è invertibile anche per $\boxed{a=1}$

(domanda) $\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow [$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \overset{?}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

mar 17-14:49

Se $a = 3/2$, $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{\begin{matrix} 1/2 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$ no!

⇝ La matrice è invertibile per ogni $a \neq 3/2$

⇝ Scambio lezioni!

- mer 25 9-11 A1 ⇝ mat. discreta
- gio 26 11-13, B ⇝ fisica

⇝ Mercoledì h. 14-16

(Foglio esercizi)

1. $\mathbb{R}^3$ (oppure $\mathbb{Q}^3$) $\cancel{\mathbb{Z}^3}$ non è uno spazio vettoriale

2. $Mat_{3\times 4}(\mathbb{R})$ (o $\mathbb{Q}$)

3. $n=4$ $3\times 4 \quad 4\times 1 \rightarrow 3\times 1$

4. $\mathbb{R}^3$

5. no. (Se faccio mosse di Gauss, le colonne sono lin. ind. se e solo se ho un pivot per colonna)

Oppure: se una matrice ha più colonne che righe, allora il sistema $Ax=0$ ha sempre una soluzione diversa da $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow \quad v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0$, dove v_i sono le colonne di A

mar 17-14:58

6 Spazio delle colonne (immagine): combinazioni lineari delle colonne di A

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\2&2&3&4\\5&5&9&4\end{bmatrix}\xrightarrow[(3)-5(1)]{(2)-2(1)}\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&0&-1&4\\0&0&-1&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&0&-1&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

pivot sulla prima e terza colonna; $\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\9\end{bmatrix}$ sono una base di Im A

$$\text{Im } A=\text{Im}\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&1&2\\4&2&2&3\\4&5&5&9\end{bmatrix}}_{B}$$

Im A = Im B, quindi posso anche ridurre a scala B

$$\begin{bmatrix}0&1&1&2\\4&2&2&3\\4&5&5&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&2&2&3\\0&1&1&2\\0&3&3&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&2&2&3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}0\\4\\4\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$ sono una base di Im B = Im A

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix} \in \operatorname{Im} A$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 14 & 5 & 5 & 9 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

---

6. di $\mathbb{R}^3$

7. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 9 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)+2(2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

x_2, x_4 scelte arbitrariamente

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -x_2 - 8x_4 \\ x_2 \\ 4x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

8. Sì, è Ker A

9. $\begin{bmatrix} -x_2 - 8x_4 \\ x_2 \\ 4x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \text{Ker } A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Vorrei verificare che $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono lin. indip.

Metodo 1: $\begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots$

Metodo 2: $x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - 8x_4 \\ x_2 \\ 4x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

10. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 9 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & * \\ 0 & 0 & -1 & 4 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{*} \end{array}\right]$$