$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 9 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Risolvere $Ax = b$ $\iff$ scrivere b come comb. lineare delle colonne di A

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = b \iff x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = b$$

$$\text{soluzioni} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Se prendo una base di $\operatorname{Im} A$, la soluzione è unica

v_1, v_3 sono una base $\iff$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ $\quad x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$b = \underline{-1} \cdot v_1 + \underline{1} \cdot v_3$$

↳ coefficienti di b nella base (v_1, v_3), <u>unici</u>

$$\underset{\text{di } Ax=b}{\text{soluzioni}} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{una soluzione particolare di } Ax=b} + \underbrace{x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{generico vettore in } Ker(A)} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

x_p + x_n

sol. particolare — vettore generico in Ker A, soluzione del sistema omogeneo $Ax=0$

(omogeneo = con termine noto 0)

(v_4, v_1)

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{}_{v_4}$ $\underbrace{}_{v_1}$

$$b = v_1 - \frac{1}{4} v_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

coefficienti di base di b nella base $\{v_4, v_1\}$

Teorema: Dato un sistema lineare $Ax=b$, con $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, sia x_p una sua soluzione qualunque, ogni altra soluzione si scrive come

$$x = x_p + z \quad , \text{ con } z \in Ker\, A$$

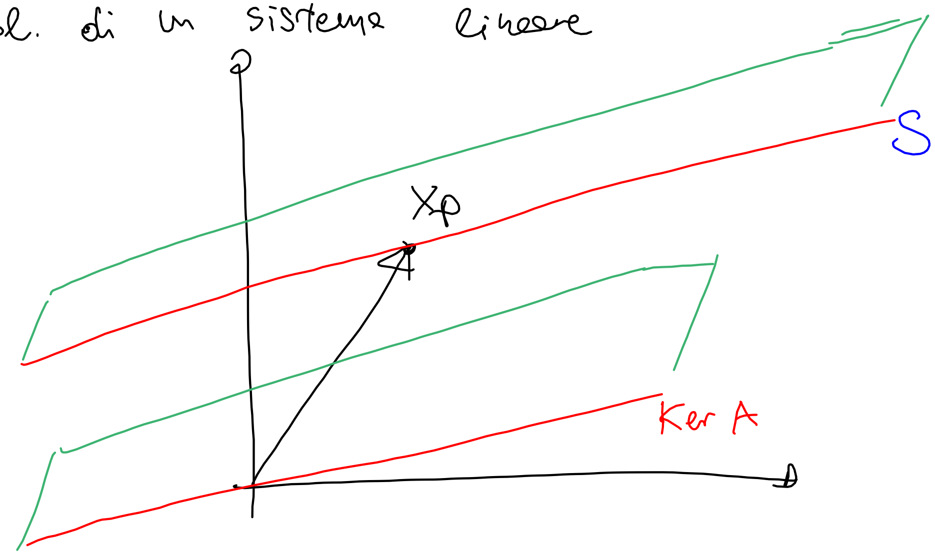
Dim: 1) Data x, se x è soluzione di $Ax=b$, allora $x - x_p \in Ker\, A$

perché?
$$A(x-x_p) = Ax - Ax_p = b - b = 0$$

2) Se prendo un vettore della forma $x = x_p + z$, $z \in Ker\, A$, allora risolve $Ax=b$. perché?

$$Ax = A(x_p + z) = Ax_p + Az = b + \underline{0} = b$$

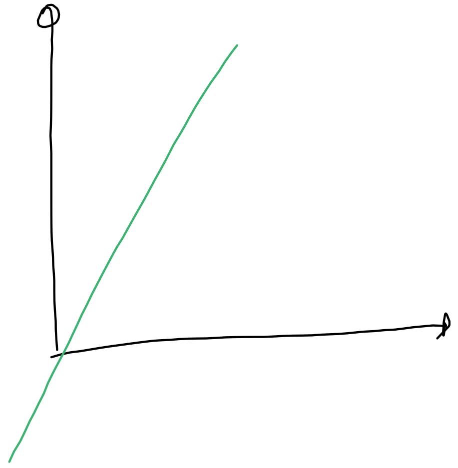
sol. di un sistema lineare



$S = \{\text{soluzioni di } Ax = b\}$

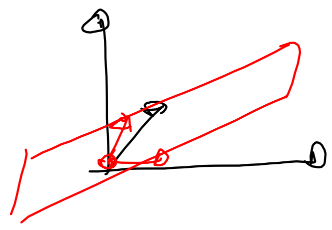
Dato uno spazio vettoriale V, tutte le sue basi hanno lo stesso numero di elementi

Questo numero si chiama dimensione del sottospazio



$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



mar 19-11:31

Es: $Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \right\}$ ha dimensione 9

base: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(dimostrare che questa è una base) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} = 0$

Es: matrici diagonali $\subseteq Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ $\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$

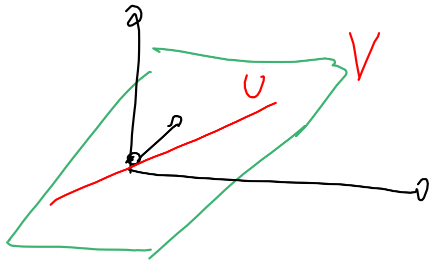
base $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Es: Matrici della forma $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a & a+b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

base $= \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} \right\}$ perché $aE_1 + bE_2 = \begin{bmatrix} \boxed{a} & \boxed{b} \\ a & a+b \end{bmatrix} = 0$

mar 19-11:35

Esempio:



$U \subseteq V$ (sottospazi vettoriali)

mi aspetto che $\dim U \leq \dim V$ (e $=$ solo se sono uguali)

e questo è vero. Perché?

Dim: prendo una base di U $\{u_1, u_2, \dots u_k\}$

$u_1, u_2, \dots u_k$ sono el. di V linearmente indipendenti

posso completarli a una base di V: $\underbrace{u_1, u_2, \dots u_k, \underbrace{v_1, v_2, \dots, v_r}_{\text{aggiunti, } \in V}}_{\text{base di } V}$

Una base di V ha più elementi di una base di U. $\square$

mar 19-11:41

• Dato un insieme di generatori di V, estraggo una base di V.

$$A = \left[v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, v_3, \ \dots \ v_m \right] \qquad \mathrm{span}(v_1, v_2 \dots v_m) = \mathrm{Im}\, A = V$$

Elim. Gauss, prendo colonne dove stanno i pivot

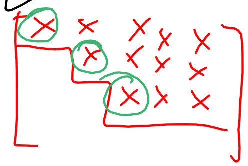
• Dati un insieme di vettori lin. indipendenti di V, posso <u>completarli</u> ad una base $\{u_1, u_2, \dots u_k\}$

$$A = \Big[u_1 \,\vdots\, u_2 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, u_k \,\vdots\, \underbrace{v_1 \,\vdots\, v_2 \ \dots \ v_m}_{\text{generatori dello spazio } V} \Big]$$

Faccio elim. Gauss, e prendo le colonne su cui ci sono i pivot

(<u>Es</u>: $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, per completarli a una base di $\mathbb{R}^3$

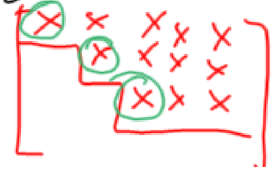
$$\left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$



Perché ho preso per forza $u_1, u_2, \dots u_k$?
Perché fare elim. di Gauss sulle prime k colonne di A restituisce k pivot (perché u_i lin. ind.)

Es: completa $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ a una base di $\mathbb{R}^3$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc}1&0&1&0&0\\2&1&0&1&0\\0&1&0&0&1\end{array}\right]$$



$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\2&1&0&1&0\\0&1&0&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-2&1&0\\0&1&0&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-2&1&0\\0&0&2&-1&1\end{bmatrix}$$

Le prime 3 colonne di A sono una base di $\mathrm{Im}\,A=\mathbb{R}^3$

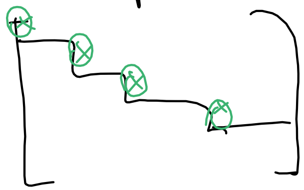
Numero di pivot ottenuti nell'eliminazione di Gauss $=\dim \mathrm{Im}\,A$

Def: Rango di una matrice A = numero di pivot $=\dim \mathrm{Im}\,A$

mar 19-11:56

Data una matrice A, qual è la dimensione del suo Kernel? Il numero di variabili libere!

Dim: supponiamo A già ridotta a scala (perché posso?)



Sol. generica di $Ax=0$ si scrive come

$$S=\left\{ \underline{x_{i_1}}\begin{bmatrix} w_1 \end{bmatrix} + \underline{x_{i_2}}\begin{bmatrix} w_2 \end{bmatrix} + \underline{x_{i_3}}\begin{bmatrix} w_3 \end{bmatrix} + \dots + \underline{x_{i_k}}\begin{bmatrix} w_k \end{bmatrix} : x_{i_1}, \dots x_{i_k} \in \mathbb{R} \right\}$$

Es dell'altra lezione

$$\underbrace{x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{base del Kernel}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

mar 19-12:04

Le soluzioni speciali sono una base di $\mathrm{Ker}\,A$. $\square$

Se io ho una matrice $m \times n$ di rango r,
ha $n-r$ colonne senza pivot $\Rightarrow \dim \mathrm{Ker} A = n-r$

Altro modo di dirlo: Per ogni $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$\dim \mathrm{Im} A + \dim \mathrm{Ker}\, A = n$$

"rank-nullity theorem"

mar 19-12:10

Trasformazioni lineari

Una trasform. lineare è una funzione da U spazio vett. a V spazio vett. tale che $\left(f: U \to V\right)$

1. $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ per ogni $u_1, u_2 \in U$
2. $f(c u_1) = c \cdot f(u_1)$ per ogni $u_1 \in U$, $c \in \mathbb{K}$

Es: A matrice, 1. $A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2$

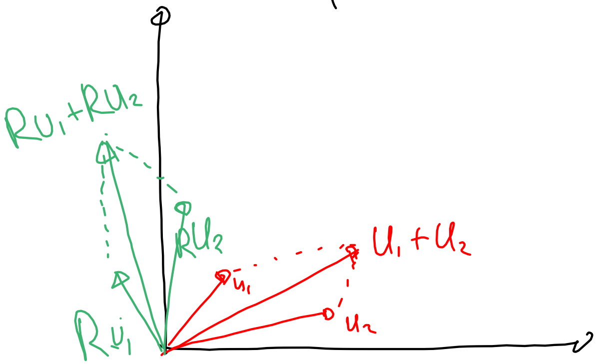
$x \mapsto Ax$ è lineare 2. $A(cu) = c(Au)$

In particolare, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \longrightarrow 2x_1 + 3x_2 - 0 \cdot x_3 + x_4$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Geometricamente, alcuni esempi:

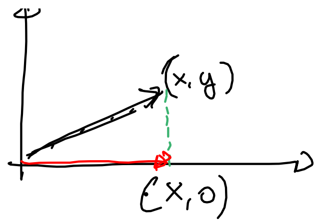
rotazioni del piano es: ruotare di 60° in senso antiorario



$$R(u_1 + u_2) = Ru_1 + Ru_2$$

mar 19-12:19

Es: proiezione:



$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1, y_2)$$

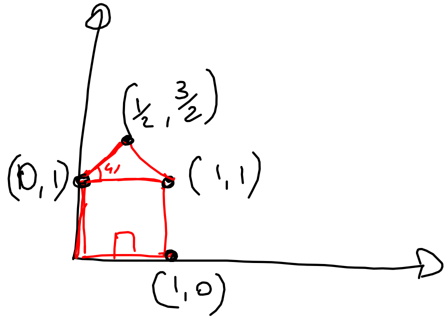
$$(x_1, 0) \qquad (x_2, 0) \qquad (x_1 + x_2, 0)$$

mar 19-12:24

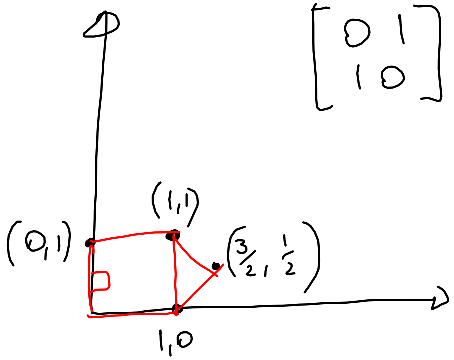
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ punti del piano. A cosa corrisponde

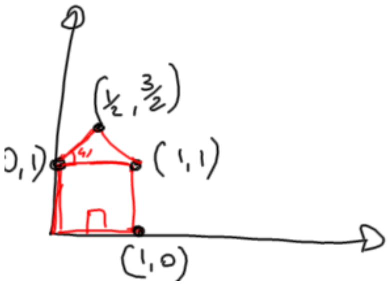
$$\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

?

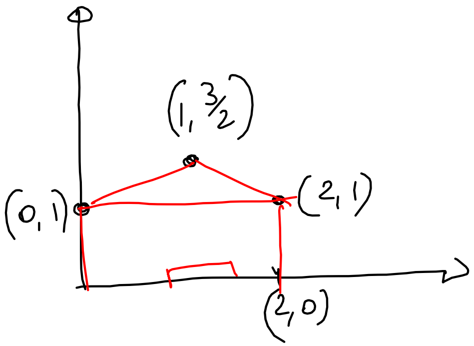


$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

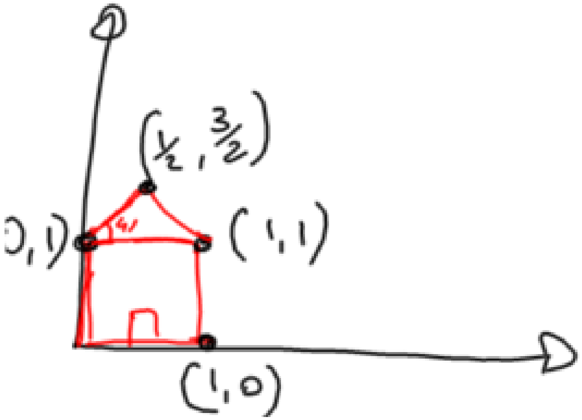




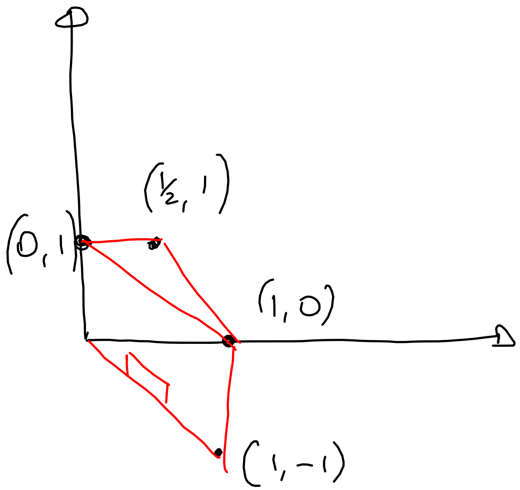
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$$



mar 19-12:30

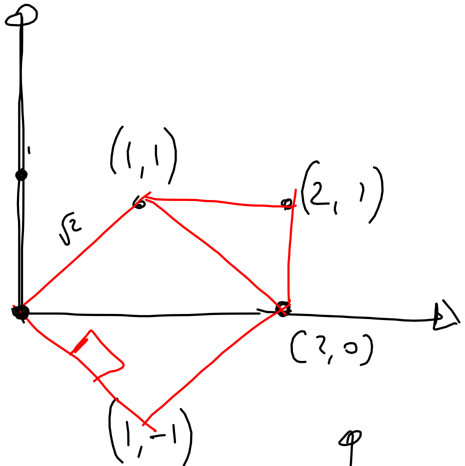


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y-x \end{bmatrix}$$



mar 19-12:31

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y\\ y-x\end{bmatrix}$$



$$f(u_1+\underline{0}) = f(u_1)+f(\underline{0})$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

schiaccia su una bisettrice

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix}$$