Prossime lezioni: domani 25/3 9-11 aula A1

30/3 9-11 aula A1

31

2

$f: V \to W$ si dice **lineare** (trasformazione, applicazione, funzione)

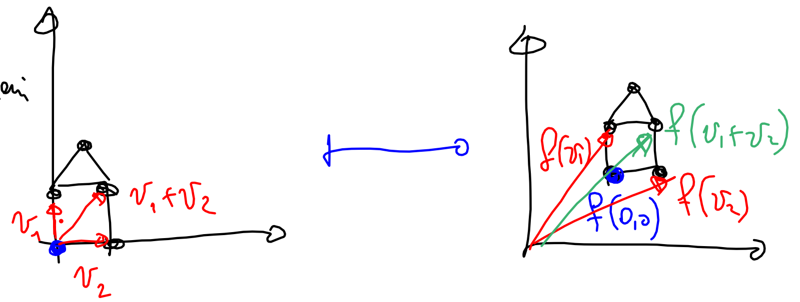
se 1) per ogni $v_1, v_2 \in V$ $\quad f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$

2) per ogni $v \in V$ $\quad c \in K$ $\quad f(cv) = cf(v)$

ES: la mappa $f(v) = Av$ è lineare per ogni $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$

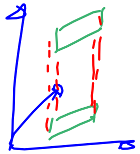
trasformazioni del piano $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ad esempio rotazioni,

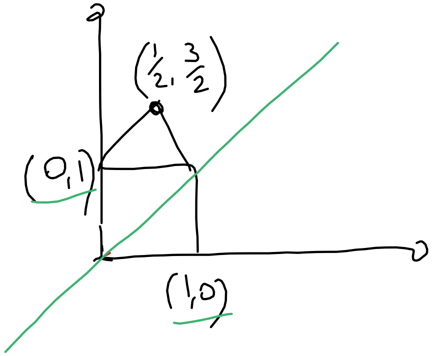
Traslazioni no:



$f(\underline{0}) \neq \underline{0}$

Proiezione da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$





$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ base di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Simmetria rispetto alla bisettrice $x=y$: $\quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + f\left(\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{3}{2}f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

in questo esempio $\quad = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Per ogni $f: V \to W$ lineare e per ogni base di V, $v_1, v_2, \dots v_k$ se fisso $f(v_1), f(v_2), \dots f(v_k)$ ho determinato $f(v)$ per ogni vettore

Es: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}3\\5\\-1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$

(*) Allora $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = f\left(x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = x\begin{bmatrix}3\\5\\-1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3x+2y\\5x\\-x-y\end{bmatrix}$

Vorremmo scrivere un'applicazione lineare come prodotto matrice-vettore; è sempre possibile? sì!

(*) $A = \begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 0\\-1 & -1\end{bmatrix}$ $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3x+2y\\5x\\-x-y\end{bmatrix}$

$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ $f\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$

Perché funziona sempre? $A\begin{bmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$ = prima colonna di A

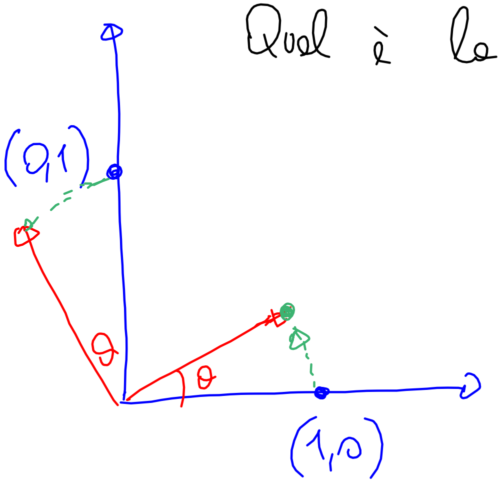
$A\begin{bmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$ = seconda colonna,

e così via

$f(v)$ e Av coincidono se v è un vettore della base canonica

$\Rightarrow$ coincidono sempre

Qual è la matrice associata a una rotazione del piano di un angolo ϑ?



$$R_\vartheta : \begin{array}{cc} f\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) & f\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{bmatrix}}\end{array}$$

Data $f: V \to W$ lineare, $v_1, v_2, \dots v_n$ base di V

$w_1, w_2, \dots w_m$ base di W

posso costruire $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ associata a f rispetto alle basi $\{v_i\}, \{w_j\}$

Si fa così: scrivo $f(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + a_{31} w_3 \dots + a_{m1} w_m$

$f(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + a_{32} w_3 + \dots + a_{m2} w_m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ES: $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y+2x \end{bmatrix}$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

se base in partenza = base in arrivo = base canonica

$$A = \begin{array}{cc} f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) & f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \underset{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{w_1} + 2 \cdot \underset{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{w_2}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y+2x \end{bmatrix}$$

$$V \longrightarrow W$$
$$V = \mathbb{R}^2 \qquad W = \mathbb{R}^2$$

Prendiamo come base dello spazio di partenza $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

e base dello spazio di arrivo $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$f(v_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$f(v_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Prendiamo lo spazio $V = \{ p(x) :$ polinomio di grado $\leq 4 \}$

e $f(p(x)) = p'(x)$ $\quad W = \{$ polinomi di grado $\leq 3 \}$

Un elemento di V si scrive come $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

$= a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4 + e v_5$

$v_1 = 1 \quad v_2 = x \quad v_3 = x^2 \quad v_4 = x^3 \quad v_5 = x^4$

Base in arrivo: $w_1 = 1 \quad w_2 = x \quad w_3 = x^2 \quad w_4 = x^3$

Parentesi... perché f è lineare?

$\forall p(x), q(x),$ $\quad [p(x)+q(x)]' = p'(x) + q'(x)$

$\forall p(x), r \in \mathbb{R}$ $\quad [r\,p(x)]' = r\,p'(x)$

$f(v_1) = [1]' = 0 = 0w_1 + 0w_2 + 0w_3 + 0w_4$

$f(v_2) \; [x]' = 1 = 1 \cdot w_1 + 0w_2 + 0w_3 + 0w_4$

$f(v_3) = [x^2]' = 2x = 0w_1 + 2w_2 + 0w_3 + 0w_4$

$f(v_4) = [x^3]' = 3x^2 = 0w_1 + 0w_2 + 3w_3 + 0w_4$

$f(v_5) = [x^4]' = 4x^3 = 0w_1 + 0w_2 + 0w_3 + 4w_4$

$$D = \begin{array}{ccccc} & f(v_2) & & f(v_4) & \\ \end{array}$$
$$D = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{ccccc} f(v_1) & & f(v_3) & & f(v_5) \end{array}$$

$D \in Mat_{4\times 5}(\mathbb{R})$

f parte da uno spazio di dim. 5 e arriva in uno di dim. 4

La matrice associata a un' applic. lineare $f: V \to W$ rispetto a basi $v_1, \dots v_n$ $w_1, \dots w_m$ è quella che per ogni v trasforma le componenti di base di v rispetto a $v_1, \dots v_n$ nelle componenti di base di $f(v)$ rispetto a $w_1, \dots w_m$

$p(x) = 5 + 7x - x^3 = \underline{5} \cdot v_1 + \underline{7}\, v_2 + \underline{0}\, v_3 - \underline{1}\, v_4 + \underline{0}\, v_5$

$p'(x) = 7 - 3x^2 = 7 w_1 + 0 w_2 - 3 w_3 + 0 w_4$ $\quad D \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

(Se lo spazio vettoriale è $\mathbb{R}^4$, e la base è quella canonica il vettore delle componenti di base è il vettore stesso)

L'appl. lineare
$$g: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$$
$$p(x) \mapsto \int_0^x p(t)\,dt$$
la matrice associata

$$Int = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Le scritture in base "traducono" ogni spazio in un $\mathbb{R}^n$:

$$a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c v_3 + d v_4 + e v_5 \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}$$

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

Se A è la matrice associata a un'applicazione lineare f l'immagine di f "è" $\operatorname{Im} A$ (sono i vettori la cui scrittura in base nella base di arrivo è un vettore di $\operatorname{Im}(A)$)

Analogamente, potete definire <u>nucleo</u> (o <u>Kernel</u>) di f:
sono i vettori $v \in V$ tali che $f(v) = 0$
e sono i vettori la cui scrittura in base è un vettore di $\operatorname{Ker}(A)$

Esempio: Derivata e integrale negli spazi di polinomi di prima

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Ker}\, D = \left\{ x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Ker f = tutti i polinomi del tipo $\{ x_1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 \}$

$$\mathrm{Ker}\, D = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5$$

Ker f = { polinomi costanti } $\subseteq$ { polinomi } $= \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$

$$\mathrm{Im}\, D = \mathbb{R}^4$$

$$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$

$$\mathrm{Int} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}\ \mathrm{Int} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$\mathrm{Ker}\ g = \{ 0 \} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{Int} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5$$

$$\mathrm{Im}\ g = \{ 0 \cdot 1 + a \cdot x + b \cdot x^2 + c \cdot x^3 + d \cdot x^4 : a, b, c, d \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$$

$= \{$polinomi tali che $p(0) = 0 \}$

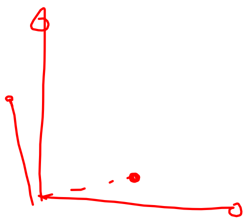
Se avete $f: V \longrightarrow W$ $\quad g: U \longrightarrow V$, potete definire $f \circ g$: $f \circ g(x) = f(g(x))$

se A è la matrice associata a f con basi $\{v_1, \dots v_n\}$, $\{w_1, \dots w_m\}$
e B è la matrice associata a g con basi $\{u_1, \dots u_p\}$, $\{v_1, \dots v_n\}$

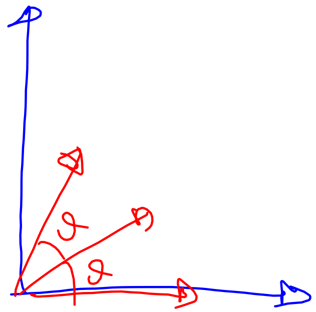
la matrice associata a $f \circ g$ è $A \cdot B$

(perché? $A(Bu) = (AB)u$)

Ricordate: matrice di rotazione in $\mathbb{R}^2$:



$$R = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$



Se applico R due volte, ottengo una rotazione di angolo 2ϑ

La sua matrice associata è

$$R^2 = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta & -2\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 2\sin\vartheta\cos\vartheta & \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta \end{bmatrix}$$