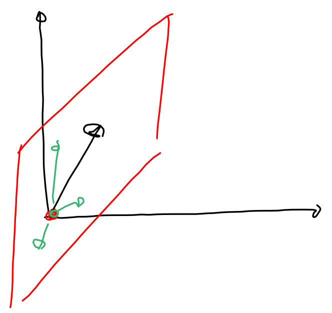


$$\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} : x=z\right\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\operatorname{Ker}\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix} = \operatorname{Im}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

Dato un sottospazio presentato come Ker A, posso ottenere un insieme di generatori risolvendo $Ax=0$

ES $\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$ variabili libere x_2, x_3

$$\operatorname{Ker} A = \left\{\begin{bmatrix}x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

Come si fa la conversione nell'altro verso?
Dato un insieme di vettori $v_1, v_2, \dots v_k$, come faccio a trovare una matrice A tale che $\ker A = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots v_k\}$
$= \mathrm{Im}\left[v_1 | v_2 | v_3 \dots v_k\right]$

ES: $v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$ Idea: cerco il vettore generico $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ che sta in $\mathrm{span}\{v_1, v_2\}$

$\iff \begin{bmatrix}1 & -1 & x_1\\2 & 0 & x_2\\3 & 2 & x_3\end{bmatrix}$ non ha un pivot nell'ultima colonna

$\Downarrow$

$\begin{array}{l} \\ (2)-2(1) \\ (3)-3(1)\end{array}\begin{bmatrix}1 & -1 & x_1\\0 & 2 & x_2-2x_1\\0 & 5 & x_3-3x_1\end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-\frac{5}{2}(2)} \begin{bmatrix}1 & -1 & x_1\\0 & 2 & x_2-2x_1\\0 & 0 & x_3-3x_1-\left(\frac{5}{2}\right)(x_2-2x_1)\end{bmatrix}$

$x_3-3x_1-\frac{5}{2}x_2+5x_1=0$ è l'equazione che cerco

o anche $2x_3-6x_1-5x_2+10x_1=0$ Posso verificare: $4\cdot 1-5\cdot 2+2\cdot 3\overset{?}{=}0$ ✓

$4x_1-5x_2+2x_3=0$ $\mathrm{span}\ v_1, v_2 = \ker\left[4\ -5\ 2\right]$ $4\cdot(-1)-5\cdot 0+2\cdot 2\overset{?}{=}0$ ✓

Altro esempio...

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\0\\2\end{bmatrix} \right\}$$

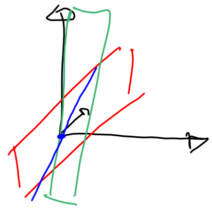
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & x_1\\ 0 & 1 & -1 & x_2\\ 0 & 0 & 0 & x_3\\ 1 & 0 & 2 & x_4\end{bmatrix} \xrightarrow{(4)-(1)} \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & x_1\\ 0 & 1 & -1 & x_2\\ 0 & 0 & 0 & x_3\\ 0 & 0 & 0 & x_4-x_1\end{bmatrix}$$

La quarta colonna sta nello span delle prime tre se non ho un nuovo pivot nella quarta colonna, cioè se $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 - x_1 = 0 \end{cases}$

$$\operatorname{Im}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

mar 25-09:28

Se ho V, W sottospazi dello stesso spazio vettoriale U
$V \subseteq U$, $W \subseteq U$, la loro intersezione $V \cap W$ è uno spazio vettoriale



Dim: devo verificare le due proprietà:
Dati $u_1, u_2 \in V \cap W$, è vero che $u_1 + u_2 \in V \cap W$?

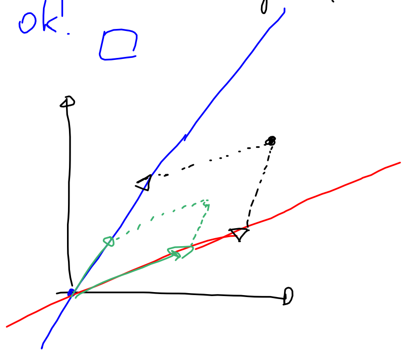
$$\begin{array}{ccc} u_1, u_2 \in V \cap W & & u_1+u_2 \in V\cap W \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ u_1, u_2 \in V & \xrightarrow{\text{implica}} & u_1+u_2 \in V \\ u_1, u_2 \in W & \xrightarrow{\text{implica}} & u_1+u_2 \in W \end{array}$$

ok!

prodotti per scalare: è uguale.

$\square$

Osservazione: $V \cup W$ non è uno spazio vettoriale



Posso però definire somma di sottospazi, $V+W$

$$V+W=\{av+bw : a,b\in\mathbb{K}\}$$

Verifico... 1) $(a_1v_1+b_1w_1)+(a_2v_2+b_2w_2)=$

$v_1, v_2 \in V$
$w_1, w_2 \in W$

$$=\underbrace{a_1v_1+a_2v_2}_{\in V}+\underbrace{b_1w_1+b_2w_2}_{\in W}$$

2) $c(a_1v_1+b_1w_1)=(ca_1)v_1+(cb_1)w_1$

$a_1, b_1, c \in \mathbb{K}$
a_2, b_2

Dati V, W (definiti o come Ker o come Im)

sono in grado di "presentare" $V \cap W$, $V+W$ come Ker o Im di matrici?

Due combinazioni sono particolarmente facili:

→ se $V = \operatorname{Im} A$, $W = \operatorname{Im} B$, allora $V+W = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$

(Perché? $av + bw = a \cdot (x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k) + b(y_1 w_1 + y_2 w_2 + \dots + y_h w_h)$)

colonne di A — colonne di B

→ se $V = \operatorname{Ker} A$, $W = \operatorname{Ker} B$:

$v \in V$ soddisfa $(\text{righe di } A) \cdot v = 0$

$w \in W$ soddisfa $(\text{righe di } B) \cdot w = 0$

$u \in V \cap W$ soddisfa entrambe

$$V \cap W = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

Es: Trovare un insieme di generatori per $V \cap W$, dove

$$V = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad e \quad W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(1) Trovo equazioni per V

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & 2 & x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)-(1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & -1 & x_3-x_1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)+\frac{1}{2}(2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & (x_3-x_1)+\frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix}$$

Equazione per V:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2+x_3-x_1 \\ 0 & -1 & -1 & x_3-x_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & x_3-x_1+x_2+x_3-x_1 \end{bmatrix}$$

$-x_1+\frac{1}{2}x_2+x_3=0$ $\qquad -2x_1+x_2+2x_3=0$ (*) $\qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$

$V = \text{Ker}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

mar 25-09:54

(2) $W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Equazioni per W: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} (3) \\ \\ (1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_3 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 2 & x_1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_3 \\ 0 & -1 & x_2 - x_3 \\ 0 & 2 & x_1 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ (3)+2(2) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_3 \\ 0 & -1 & x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & \underline{x_1 + 2x_2 - 2x_3} \end{bmatrix}$

Modo di verificare:
è vero che $x_1 + 2x_2 - 2x_3$
è soddisfatta da $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$? $\underline{\text{sì}}$

$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \right\}$

$= \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(V, W sono piani in $\mathbb{R}^3$)

$$V = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad W = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(3) $V \cap W = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ Però voglio dei generatori...

Riduciamo a scala la matrice

$$\begin{array}{c} (2) \\ (1) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} (1) \\ \frac{1}{5}(2) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c} (1)-2(2) \\ (2) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \overset{-6/5}{\overbrace{-2+\frac{4}{5}}} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6/5 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

x_3 variabile libera

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6/5 \\ 0 & 1 & -2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{Soluzioni: } \left\{ \begin{bmatrix} \frac{6}{5}x_3 \\ \frac{2}{5}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x_3 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 6/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Base di } V \cap W} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$V \cap W$ sono i multipli di $\begin{bmatrix} 6/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\left(\text{oppure di } \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$

Controlliamo se torna... è vero che $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$?

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ok!

È vero che $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \in W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ok!

mar 25-10:26

Successione di Fibonacci: $F_0 = 0$ $F_1 = 1$ $F_{K+1} = F_K + F_{K-1}$

$K \geq 1$

"stato" al tempo K $x_K = \begin{bmatrix} F_{K-1} \\ F_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

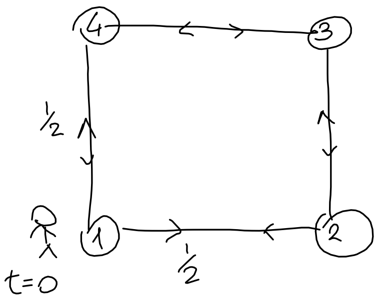
$$X_{K+1} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \cdot X_K$$

$$\begin{bmatrix} F_K \\ F_{K+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} F_{K-1} \\ F_K \end{bmatrix}$$

$$X_{K+1} = A x_K = A \cdot A x_{K-1} = A \cdot A \cdot A \cdot x_{K-2} = \dots = A^K x_1$$

Posso calcolare A^K per quadrature successive

$F_{2^{1000}}$ richiede 1000 quadrati



Al tempo 0, sono per forza nell'angolo 1

Al tempo 1, sono con $\frac{1}{2}$ probabilità nell'angolo 2 e con $\frac{1}{2}$ nell'angolo 4

Al tempo 2, ho $\frac{1}{2}$ di essere in 3 e $\frac{1}{2}$ di essere in 1

$$X_t = \begin{bmatrix} \text{probabilità di essere in 1 al tempo } t \\ \text{prob. di essere in 2 al tempo } t \\ \text{prob. di essere in 3 al tempo } t \\ \text{prob. di essere in 4 al tempo } t \end{bmatrix}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X_{t+1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} X_t$$

matrice di adiacenza del grafo