Domani 31/3 teoria
Giovedì 2/4 esercizi

$f: \mathbb{R}[t]_{\le 2} \to \mathbb{R}[t]_{\le 2}$

$$f(at^2+bt+c) = (a+b+c)t^2 + ct + c \qquad (1)$$

Trovare matrice associata secondo base $\{1, t, t^2\}$, nucleo e immagine

Applico f agli elementi della base dello spazio di partenza, scrivo in forma di comb. lineare della base in arrivo

$p_1 = 1 \quad p_2 = t \quad p_3 = t^2$

Per trovare $f(1)$ sostituisco $a=b=0$, $c=1$ in (1)

$f(0\cdot t^2 + 0\cdot t + 1\cdot 1) = (0+0+1)t^2 + 1\cdot t + 1$

$$\begin{cases} f(p_1) = t^2+t+1 = 1\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 1\cdot p_3 \\ f(p_2) = f(t) = t^2 = 0\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 1\cdot p_3 \\ f(p_3) = f(t^2) = t^2 = 0\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 1\cdot p_3 \end{cases}$$

$\leftarrow a=1, b=0, c=0$

$$\begin{array}{c|ccc} & f(p_1) & f(p_2) & f(p_3) \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ t^2 & 1 & 1 & 1 \end{array} = A$$

matrice associata a f

$$f(at^3+bt+c) \overset{(*)}{=} \square t^2 + \square t + \square c \qquad f: \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$$

Questa uguaglianza non definisce univocamente f sul suo dominio

$f(t^2) = ?$

Per definirla bene devo avere un'espressione del tipo

$f(at^3+bt^2+ct+d) = \dots$

oppure cambiare il dominio

$f: \operatorname{span}\{t^3, t, 1\} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

Stessa cosa, ma con base $\{p_1 = 1,\ p_2 = t,\ p_3 = t^2\}$ in partenza

e $\{q_1 = t^2+2t+3,\ q_2 = t^2-1,\ q_3 = 1\}$

$f(p_1) = t^2+t+1 = \boxed{1/2} \cdot q_1 + \boxed{1/2}\, q_2 + \boxed{0}\, q_3$

$f(p_2) = t^2 = \square\, q_1 + \square\, q_2 + \square\, q_3$

$f(p_3) = t^2 = \square\, q_1 + \square\, q_2 + \square\, q_3$

$$f(p_1) = t^2+t+1 = \boxed{\tfrac{1}{2}} \cdot q_1 + \boxed{\tfrac{1}{2}} q_2 + \boxed{0} q_3$$
$$f(p_2) = t^2 = \boxed{0} q_1 + \boxed{1} q_2 + \boxed{1} q_3$$
$$f(p_3) = t^2 = \boxed{0} q_1 + \boxed{1} q_2 + \boxed{1} q_3$$

$$B = \begin{array}{c} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{array} \begin{array}{ccc} f(p_1) & f(p_2) & f(p_3) \\ \end{array} \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ \tfrac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oss: Dato un polinomio generico, se lo scrivo come comb. lineare dei polinomi p_1, p_2, p_3, $p = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$ la matrice associata mi dice chi sono i coefficienti y_1, y_2, y_3 tali che

$$f(p) = y_1 p_1 + y_2 p_2 + y_3 p_3 \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$f(p) = z_1 q_1 + z_2 q_2 + z_3 q_3 \qquad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Sto cercando x_1, x_2, x_3 tali che

$$x_1\left(t^2+2t+3\right)+x_2\cdot\left(t^2-1\right)+x_3\cdot 1 = t^2+t+1$$

Perché siano uguali, devono essere uguali a sx e dx i coefficienti di $1, t, t^2$

$$\begin{array}{l} \text{coeff. di } t^2 \\ \text{coeff. di } t \\ \text{coeff. di } 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1+x_2 = 1 \\ 2x_1 = 1 \\ 3x_1-x_2+x_3=1 \end{array} \right.$$

sistema lineare:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(1)-(2)

$$\to \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Soluzione del sist. lineare

$x_1=\frac{1}{2}$ $x_2=\frac{1}{2}$ $x_3=0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Per trovare $f(p_3)$, il sistema è lo stesso ma con un termine noto diverso

Rifaccio eliminazione di Gauss su

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

soluzione

$$t^2 = 0 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 + 1 \cdot q_3 = \underline{0}(t^2+2t+3) + \underline{1}(t^2-1) + \underline{1} \cdot 1$$

$$f(P_3) = t^2 = 0 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 + 1 \cdot q_3$$

Oss: i tre sistemi hanno la stessa matrice, quindi posso anche scrivere tutti i tre termini noti insieme e fare elim. di Gauss una volta sola

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots$$

come quando abbiamo calcolato matrici inverse

Oss: È $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ perché $Ax = b \rightsquigarrow x = A^{-1}b$

(quando A è invertibile)

Chi sono nucleo e immagine di f?

$$f(p)=0 \iff f(at^2+bt+c)=(a+b+c)t^2+ct+c=0$$

$$\iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ c \quad =0 \\ c \quad =0 \end{cases} \quad \dots$$

Alternativamente, possiamo vederlo dalla matrice associata:

$$\operatorname{Ker} A=\operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\left\{x_2\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} : x_2\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

$\operatorname{Ker} f$ = i polinomi i cui coeff. di base rispetto a p_1, p_2, p_3 sono vettori di $\operatorname{Ker} A$

$$=\operatorname{span}\{0\cdot p_1+1\cdot p_2-1\cdot p_3\}=\operatorname{span}\{t-t^2\}$$

(Perché funziona? $y_1p_1+y_2p_2+y_3p_3=f(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)$, dove $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$f(p)=0 \iff y_1, y_2, y_3=0 \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\in\operatorname{Ker} A$)

Se avessimo fatto la stessa cosa con B, veniva lo stesso risultato

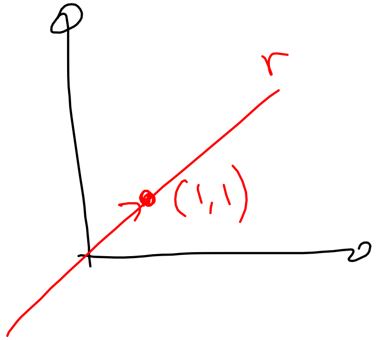
$\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} A$

$\operatorname{Im} f$: prendo $\operatorname{Im} A$, e la "leggo" come polinomi tramite la base p_1, p_2, p_3

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{span} \left\{ 1+t+t^2, t^2 \right\}$$

[Oppure: prendo $\operatorname{Im} B$, e la "leggo" tramite la base $\underbrace{q_1, q_2, q_3}_{\text{base del codominio}}$]



$$r = \left\{ \text{multipli di } \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} : x-y=0 \right\}$$

$$= \left\{ t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} : t\in\mathbb{R} \right\}$$

Piano in $\mathbb{R}^3$: $\text{span}\{v_1, v_2\} = \{t v_1 + s v_2 : t,s\in\mathbb{R}\}$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}t-s\\2t\\3t+s\end{bmatrix}$$

$$V = \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix} : a+c+d=0 \right\} \qquad W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\2\\1\end{bmatrix} \right\}$$

Trova basi di $V+W$, $V\cap W$

presentato via equazioni — presentato via generatori

1) Intersezione: comodo farla per equazioni

Devo scrivere equazioni per W

Metodo: scrivo i generatori + vettore incognito in una matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 0 & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b+a \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & b+a \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & \boxed{c-2d} \\ 0 & 0 & \boxed{b+a} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \Leftrightarrow$ non c'è un pivot nella terza colonna

$\begin{cases} c-2d=0 \\ b+a=0 \end{cases}$ equazioni del sottospazio W.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : c-2d=0,\ b+a=0 \right\}$$

Equazioni di $V \cap W$:

$$V \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : \underbrace{a+c+d=0}_{\text{equazioni di } V},\ \underbrace{c-2d=0,\ b+a=0}_{\text{equazioni di } W} \right\}$$

Come trovo una base di $V \cap W$?

$$V \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \right\} = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Trovo una base di $\mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \leftarrow x_3 - 2x_4 = 0$$

x_4 variabile libera, soluzioni:

$$\begin{bmatrix} -3x_4 \\ 3x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \left\{ x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{-3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{-2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V \cap W = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per trovare base di $V+W$:

Devo scrivere generatori per V

$$V = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} -x_3-x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left\{ x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Generatori di $V+W$:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad\quad}_{\text{gen. di } V} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{gen. di } W}$$

Da qui estraggo una base

Troverete pivot nelle prime 4 colonne

$V+W$ è un sottosp. di dimensione 4 di $\mathbb{R}^4 \Rightarrow$ è $\mathbb{R}^4$