Matrice TRASPOSTA:

Data $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ la matrice B tale che

$B_{ij} = A_{ji} \quad \forall i,j$ si chiama <u>trasposta</u> di A

$B \in Mat_{n \times m}(\mathbb{K})$

<u>ES</u>: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$B_{3,1} = A_{1,3}$

A e B sono "simmetriche rispetto alla diagonale principale

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

La trasposta si indica solitamente con A^T

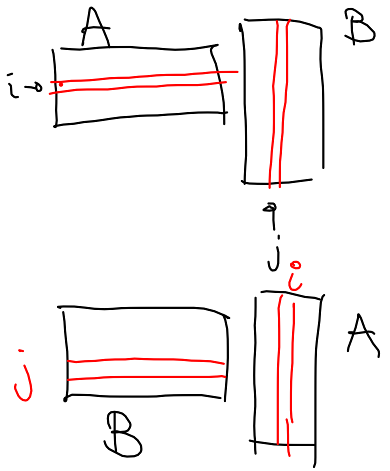
(a volte anche A^+, A', A^t, ${}^tA$)

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ $\quad 3\times 1$ $\qquad v^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ $\quad 1\times 3$

Proprietà:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

(*)



$(AB)_{ij}$

$\downarrow$

$((AB)^T)_{ji}$

(*) $A\cdot A^{-1} = I \longrightarrow (A^{-1})^T A^T = (A\cdot A^{-1})^T = I$

$A^{-1}\cdot A = I \longrightarrow A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$

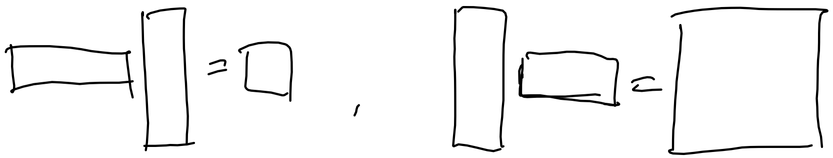
$I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

Una matrice si chiama <u>simmetrica</u> se $A = A^T$

es. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ [S]

Data qualunque $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$, posso sempre fare

$\underset{n\times m}{A^T}\,\underset{m\times n}{A} \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times m}{A^T} \in Mat_{m\times m}(\mathbb{K})$



E questi prodotti sono sempre simmetrici (perché? $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$)

Spazio delle righe di A: spazio vettoriale $\text{span}(w_1, w_2, \ldots, w_m)$

dove i w_i sono le righe di A

cioè $\text{im}\, A^T$

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad \text{im}\, A = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^2$

$\text{im}\, A^T = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$

Teo: Per ogni $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$,

$\dim \text{im}\, A = \dim \text{im}\, A^T$

$= \text{rK}\, A$ = numero di pivot che ottengo riducendo a scala A

mar 31-14:26

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 10 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & 2v_1 & v_1+v_2 & v_1+2v_2 \end{array}\end{array}$$

Dim: Riduciamo a a scala (ridotta) con eliminazione di Gauss (combinazioni di righe):

$$A \to R = \begin{bmatrix} 1 & \times & \times & \times & \times & 0 & \times & \times & \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & \times & \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & & & & 1 & \times & \times & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad \in \operatorname{Im} A^T$$

Ad ogni passo di Gauss, facciamo combinazioni lineari di righe

Quindi tutte le righe che compaiono stanno nello spazio delle righe di A, $\operatorname{Im} A^T$. In particolare, le righe di R stanno nello spazio delle righe di A

$$R=\begin{bmatrix} 1 & x & x & x & x & 0 & x & x & x & 0 & x & x & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & x & x & x & 0 & x & x & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 1 & x & x & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & 0 & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Le righe di R sono tutte linearmente indipendenti. Perché?

combinazione lineare:

$$\begin{aligned} &\alpha\,[1\ x\ x\ x\ x\ 0\ x\ x\ x\ 0\ x\ x\ 0\ 0]\ + \\ &\beta\,[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ x\ x\ x\ 0\ x\ x\ 0\ 0]\ + \\ &\gamma\,[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ x\ x\ 0\ 0]\ + \\ &\delta\,[0\ \dots\ 0\ 1\ 0]\ + \\ &\varepsilon\,[0\ \dots\ 0\ 0\ 1]\ = \\ \hline &[0\ 0\ \dots\ 0] \end{aligned}$$

Ci sono colonne con un solo 1 e tanti zeri, quindi i coefficienti corrispondenti devono essere tutti 0

Quindi, se ho r pivot, allora ho r elementi lin. ind. all'interno dello spazio delle righe $\operatorname{Im} A^T$

Allora, $\dim \operatorname{Im} A^T \geq r = \dim \operatorname{Im} A$ $(*)$

Come faccio a dimostrare che $\dim \operatorname{Im} A \geq \dim \operatorname{Im} A^T$?

Riapplico lo stesso ragionamento ad A^T:

$$\dim \operatorname{Im} (A^T)^T \geq \dim \operatorname{Im} A^T$$

$(*)$ per A^T al posto di A

$$\| \quad \dim \operatorname{Im} A$$

$\square$

ES:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso $r=1$ del teorema:
se in una matrice tutte le colonne sono multiple l'una dell'altra, allora lo sono anche le righe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(2c)-2\cdot(1c) \rightarrow (3c)-3(1c)$

Posso fare elim. di Gauss sulle colonne così come sulle righe, e il numero di pivot che ottengo è lo stesso

Eliminazione per righe:

soluzioni di $Ax=b$, $Ax=0$ restano invariate

spazio delle righe $\mathrm{Im}\,A^T$ resta invariato

Spazio delle colonne $\mathrm{Im}\,A$ cambia!

Trova rango = # pivot

pivot compaiono sulle colonne corrispondenti a quelle in A che formano una base di $\mathrm{Im}\,A$

Elim. per colonne:

Soluzioni di $Ax=b$, $Ax=0$ cambiano

spazio delle colonne resta invariato

Spazio delle righe $\mathrm{Im}\,A^T$ cambia!

rango = # pivot

pivot compaiono sulle righe che corrispondono a quelle in A che formano una base di $\mathrm{Im}\,A^T$

mar 31-14:52

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot in colonne 1, 3, allora la prima e terza colonna di A,

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono una base di $\operatorname{Im} A$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss per colonne}} \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 \\ X & X & 0 \\ X & X & 0 \end{bmatrix}$$

pivot nelle righe 1, 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ la prima e la terza riga di B sono una base dello spazio delle righe di B

Fare operazioni di Gauss sulle righe corrisponde a moltiplicare a <u>sinistra</u> per matrici di eliminazione

<u>ES:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Quindi un passo di Gauss sulle righe trasforma $Ax = b$

in $(E \cdot A)x = E \cdot b$

è come prendere $Ax = b$ e moltiplicare entrambi i membri per E a sinistra, non cambia soluzioni

Un passo di Gauss sulle colonne equivale a moltiplicare a <u>destra</u> per una matrice F (invertibile)

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 - 2b_1 & b_3 \end{bmatrix}$$

Se prendo $Ax=b$, non posso trasformarlo in $AFx=b$ o in $AFx=Fb$, non avrebbero le stesse soluzioni

Però è vero che $AF\cdot(F^{-1}x)=b$

$$AF\cdot y=b \qquad y=F^{-1}x$$

Esempio:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&4\\0&0&1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\6\\1\end{bmatrix}}_{b}$$

$$(2)-4(3)\ \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{EA}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=(2)-4(3)\ \underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}}_{Eb}$$

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Se invece faccio eliminazione su colonne,

$$(3c)-2(2c)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{AF}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}}_{F^{-1}x}=\begin{bmatrix}1\\6\\1\end{bmatrix}$$

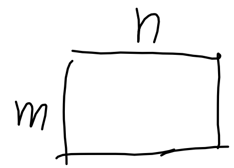
$$F=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$F^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Altra dimostrazione che $\dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A^T$ $\quad A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$

Prendiamo una base $\{v_1, v_2, \dots v_r\} \subseteq \mathbb{R}^m$ dello spazio delle colonne di A

Ogni colonna di A si scrive in modo unico come



$$a^{(i)} = w_{1i} v_1 + w_{2i} v_2 + w_{3i} v_3 + \dots + w_{ri} v_r = \qquad i = 1, 2, \dots n$$

↑ i-esima colonna di A

$$\text{i-esima colonna di } A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1i} \\ w_{2i} \\ \vdots \\ w_{ri} \end{bmatrix}$$

$$\underset{m \times 1}{\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}} = \underset{m\times r}{\begin{bmatrix} \ V \ \end{bmatrix}} \underset{r\times 1}{\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}}$$

Chiamo $V = [v_1 | v_2 | \dots v_r]$ la matrice $m \times r$ con v_i come colonne

Mettendo tutto insieme

$$A = \left[a^{(1)} \; a^{(2)} \; \cdots \; a^{(n)} \right] = \left[v_1 \,\vdots\, v_2 \,\vdots\, v_3 \cdots v_r \right] \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{r1} & w_{r2} & \cdots & w_{rn} \end{bmatrix}$$

$$m \times n \qquad = \qquad m \times r \quad r \times n$$

Tutte le colonne di A sono comb. lineari delle r colonne della matrice $V = [v_1 \cdots v_r]$

Anche le righe di A sono comb. lineari delle r righe della matrice W: $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix}$ chiamiamole $w_1, w_2, \dots w_r$

$$i\text{-esima riga di } a = [\text{i-esima riga di } V] \cdot W = v_{i1} \cdot w_1 + v_{i2} w_2 + \cdots + v_{ir} \cdot w_r$$

Tutte le righe di A sono comb. lineari di $w_1, w_2, \dots w_r$

$\Rightarrow w_1, w_2, \dots w_r$ generano lo spazio delle righe di A

mar 31-15:36

Allora lo spazio delle righe di A ha dimensione $\leq r$

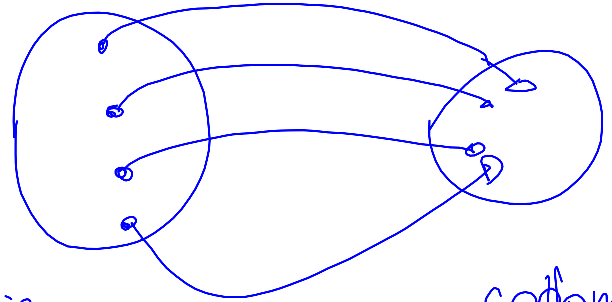
$$\dim \operatorname{Im} A^T \leq \dim \operatorname{Im} A$$

... e da qui finiamo come prima (applicando lo stesso ragionamento ad A^T, ottenete $\dim \operatorname{Im} (A^T)^T \leq \dim \operatorname{Im} A^T$). $\square$

In particolare, se una matrice A ha rango r, potete scriverla come

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times r}{V} \cdot \underset{r\times n}{W}$$

$$\underset{4\times 5}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & -4 & 0 \end{bmatrix}} = \underbrace{\underset{4\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}}_{\text{genera lo spazio delle colonne}} \underbrace{\overset{1\times 5}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}}}_{\text{genera lo spazio delle righe}}$$



dominio, insieme di partenza

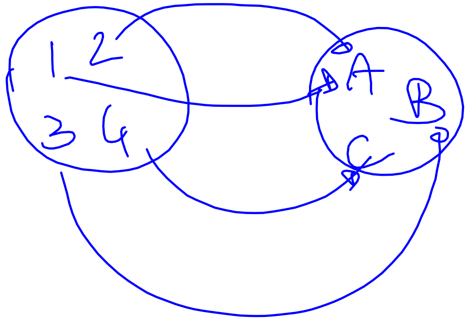
codominio, insieme di arrivo

$$\{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{A, B, C\}$$

iniettiva: se non succede mai che $f(a) = f(b)$ per $a \neq b$

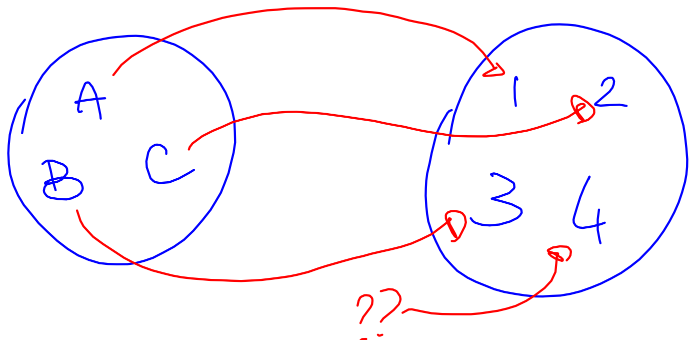
suriettiva: se ogni elemento del codominio è $f(\text{qualcosa})$

Riuscite a fare una funzione suriettiva da $\{1,2,3,4\}$ in $\{A,B,C\}$?



sì.

Riuscite a fare una f. suriettiva da $\{A,B,C\}$ a $\{1,2,3,4\}$



Non riesco a fare f. suriettive da A a B se A ha meno elementi di B

Analogamente, non riesco a fare f applicazione lineare suriettiva $f: V \to W$ se V è uno spazio vettoriale di dimensione strettamente minore di quella di W

Dimostrazione: se ho $f: V \to W$ $\dim V = n$

$\dim W = m$

Abbiamo visto che $\underline{\dim \operatorname{Im} f} + \underline{\dim \operatorname{Ker} f} = n$

Quindi $\operatorname{Im} f$ ha dimensione al più n

impossibile che sia tutto W se $\dim W \geq n$