non ci saranno lezioni mar 5/5 ← fisica

gio 7/5

(no ricevimento 6/5)

ven 15/5 aula A, 9-11

Inversa di una matrice 2x2

$$\left[\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{se } a\neq 0} \left[\begin{array}{cc:cc} \boxed{a} & b & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{d-\frac{c}{a}b} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots$$

Alla fine viene

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

funziona sempre se $ad-bc \neq 0$

Per ricordarsi, pensate a MNEMONICA:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}$$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ è invertibile se e solo se $ad-bc \neq 0$

C'è qualcosa di analogo in dimensione superiore, un "numero" che dice se una matrice è invertibile o no?

Sì, si chiama determinante di A

Fissato n,

$$\det : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

è una funzione tale che $\det A \neq 0$ se e solo se A invertibile
$\det A = 0$ sse A è non invertibile (singolare)

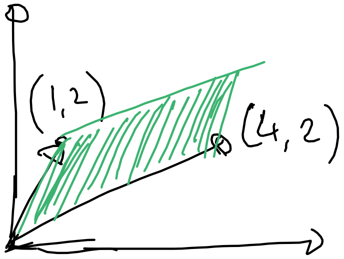
Vedremo tre modi di calcolarlo

1) ± prodotto dei pivot

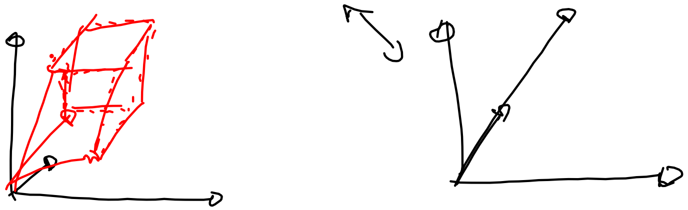
2) sommatoria con n! termini e ±

3) somme di n ± determinanti $(n-1)\times(n-1)$

Interpretazione geometrica: area del parallelogramma/ parallelepipedo / iperparallelepipedo con lati le righe di A

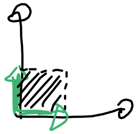


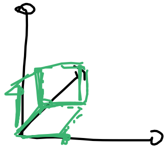
$$\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix} = \pm \text{ Area in verde}$$



Proprietà della funzione determinante:

1) $\boxed{\det(I) = 1}$ I = matrice identità $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$





$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0$

2) Se ottengo B da A scambiando due righe (e tenendo tutto il resto uguale), allora $\det B = -\det A$

es: $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ $\det \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = cb - ad$ ✓

Questo ci basta per calcolare det P, dove P è una matrice di permutazione

es: $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $P \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$$\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = -1$$

$$\det\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix} =$$

$$= -\det\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} = -1$$

Le permutazioni sono di due tipi:
- numero pari di scambi, $\det P = 1$
- numero dispari di scambi, $\det P = -1$

(la parità è sempre fissata)

3) Il determinante è una funzione lineare su ogni riga:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & b' \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{bmatrix}$$

(matrici tutte uguali tranne che per una riga)

$$\det\begin{bmatrix} ta & tb \\ c & d \end{bmatrix} = t \cdot \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \forall t \in K$$

Nota: questo non vuol dire che $\det A + \det B \neq \det(A+B)$

e non vuol dire che $\det 2A \neq 2 \det A$

$$\det\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = 2 \cdot \det\begin{bmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Allo stesso modo, $\det(tA) = t^n \det A$, dove $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$

□

[<u>Oss:</u> queste tre proprietà bastano per definire univocamente det( )]

4) $\det \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$ (se $\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$ diagonale)

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} = a_1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix} = \cdots$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

5) Se A ha due righe uguali, $\det A = 0$

$$\det \begin{bmatrix} \boxed{a_1 \; \cdots \; a_n} \\ \vdots \\ \boxed{a_1 \; \cdots \; a_n} \\ \vdots \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} \boxed{a_1 \; \cdots \; a_n} \\ \vdots \\ \boxed{a_1 \; \cdots \; a_n} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

det A è uguale
al suo opposto
$\Rightarrow \det A = 0$

[(vi sto fregando se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)]

6) Il determinante è invariante per "mosse di Gauss" $r_i \to r_i + t r_j$

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \vdots & & \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ & \vdots & & \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_1+tb_1 & a_2+tb_2 & \cdots & a_n+tb_n \\ & \vdots & & \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ & \vdots & & \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_1+tb_1 & \cdots & a_n+tb_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ & \vdots & \\ b_1 & \cdots & b_n \\ & \vdots & \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} tb_1 & \cdots & tb_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} + t\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ & \vdots & \\ b_1 & \cdots & b_n \\ & \vdots & \end{bmatrix}}_{= 0}$$

perché ha due righe uguali

7) Se una matrice A ha una riga di zeri, $\det A = 0$

<u>dim</u>: facendo una mossa di Gauss, mi riconduco a due righe uguali

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & \vdots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & \vdots & \end{bmatrix} = 0$$

perché ha due righe uguali

8) Se A è triangolare superiore con non-zeri $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ diagonale, $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

Perché?

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & \vdots & * \\ & & \ddots & & * \\ & 0 & & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & 0 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonale

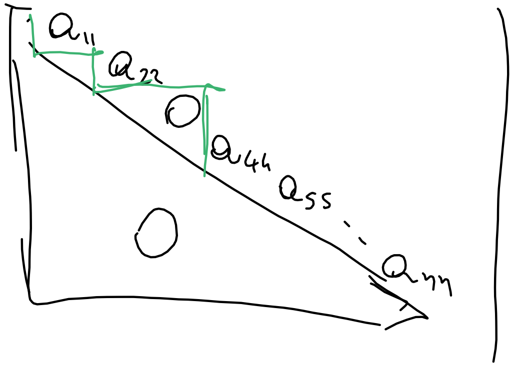
con mosse di Gauss (a una riga sommo un multiplo dell'altra

$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

8.5) Se A è triang. superiore con zeri sulla diagonale, $\det A = 0$

(insomma, $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ sempre se A è triangolare)

Perché? Facendo mosse di Gauss, riesco sempre a creare una riga di zeri



Es: CALCOLA

$$\det\begin{bmatrix}2&4&-2\\4&8&-3\\-2&-3&7\end{bmatrix}=?$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}2&4&-2\\4&8&-3\\-2&-3&7\end{bmatrix}}\to\underset{B}{\begin{bmatrix}2&4&-2\\0&\boxed{0}&1\\0&1&5\end{bmatrix}}\to\underset{C}{\begin{bmatrix}2&4&-2\\0&1&5\\0&0&1\end{bmatrix}}\left(\to\cdots\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

scambio di righe!

$\det A=-2$ $\det B=-2$ $\det C=2$

In generale, per calcolare $\det A$, faccio eliminazione di Gauss ottenendo R triangolare superiore, e

$$\det A=(-1)^s\, r_{11}r_{22}r_{33}\cdots r_{nn}$$

, dove s = numero di volte che ho scambiato righe

Con queste proprietà, posso anche ottenere il determinante di una 2x2 in questo modo:

$[a\ b] = [a\ 0] + [0\ b]$ $\qquad$ $[c\ d] = [c\ 0] + [0\ d]$

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\det\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}}_{\underbrace{a\cdot d\cdot \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{ad}} + \underbrace{\det\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}}_{0} + \underbrace{\det\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}}_{\underbrace{b\cdot c\cdot \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{-bc}} + \underbrace{\det\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}}_{0}$$

$= \boxed{ad - bc}$ formula che sapevo già

Per una 3x3?

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a&0&0\\ d&e&f\\ g&h&i\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix}0&b&0\\ d&e&f\\ g&h&i\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix}0&0&c\\ d&e&f\\ g&h&i\end{bmatrix} =$$

3 termini

$$= \det\begin{bmatrix} a&0&0\\ d&0&0\\ g&h&i\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a&0&0\\ 0&e&0\\ g&h&i\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a&0&0\\ 0&0&f\\ g&h&i\end{bmatrix} + \dots \text{ altri 6 termini } \dots$$

9 termini

$$= \underbrace{\det\begin{bmatrix} a&0&0\\ d&0&0\\ g&0&0\end{bmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underbrace{\det\begin{bmatrix} a&0&0\\ d&0&0\\ 0&h&0\end{bmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \det\begin{bmatrix} a&0&0\\ d&0&0\\ 0&0&i\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a&0&0\\ 0&e&0\\ g&0&0\end{bmatrix} + \dots$$

27 termini

Gli unici non nulli sono quelli che non hanno due termini nella stessa colonna cioè

$$= \det\begin{bmatrix} a&0&0\\ 0&e&0\\ 0&0&i\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0&b&0\\ 0&0&f\\ g&0&0\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0&0&c\\ d&0&0\\ 0&h&0\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a&0&0\\ 0&0&f\\ 0&h&0\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0&b&0\\ d&0&0\\ 0&0&i\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0&0&c\\ 0&e&0\\ g&0&0\end{bmatrix}$$

uno per ogni modo di scegliere un elemento diverso da (1,2,3) per ogni riga

cioè, tanti quanti le permutazioni di 3, $3! = 6$

$$=\det\begin{bmatrix}a&0&0\\0&e&0\\0&0&i\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}0&b&0\\0&0&f\\g&0&0\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}0&0&c\\d&0&0\\0&h&0\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&f\\0&h&0\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}0&b&0\\d&0&0\\0&0&i\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}0&0&c\\0&e&0\\g&0&0\end{bmatrix}$$

$$\|$$

$$a\cdot e\cdot i\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\overset{\|}{1}}+bfg\,\underbrace{\det\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}}_{=1}+cdh\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}}_{=1}+afh\,\underbrace{\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}}_{=-1}+bdi\,\underbrace{\det\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{=-1}+ceg\,\underbrace{\det\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}}_{=-1}$$

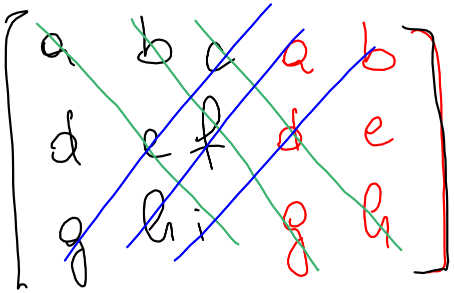
$$=aei+bfg+cdh-afh-bdi-ceg$$

$$\det\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=ad-bc$$

$$\det\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=aei+bfg+cdh\ \ldots$$

formula di Sarrus

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\qquad -ceg-bdi-afh$$



Per $n=4$, è più complicato. Ci sono addendi del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

che non è una "permutazione ciclica"

In generale, verrà una formula del tipo

$$\det A = \sum_{(s_1,s_2\dots s_n) \text{ permutazione di } (1,\dots,n)} \underbrace{\det P_{s_1,s_2\dots s_n}}_{\text{questo è } \pm 1} a_{1s_1} a_{2s_2} a_{3s_3} a_{4s_4} \cdot \dots \cdot a_{ns_n}$$

$n!$ addendi

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = 2 \cdot 8 \cdot 7 + 4 \cdot (-3) \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 \cdot (-3) \; \ldots$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad - (-2) \cdot 8 \cdot (-2) - (-3) \cdot (-3) \cdot 2 - 7 \cdot 4 \cdot 4.$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 8 - 2 - 2 = 4.$$