Det: $Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ $\det(A)=0 \iff A$ singolare

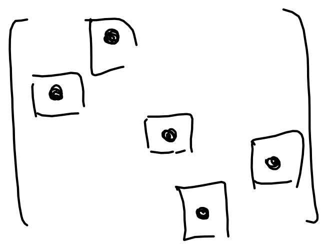
Per calcolare det A: formule alternative

1) $A \to R$ con mosse di Gauss, $\det A = (-1)^s\, r_{11} r_{22} \cdots r_{nn}$ $s = \#$ scambi righe

2) $\det A = \sum_{(p_1,p_2,\dots p_n)\ \text{permutazione}} \boxed{\det P_{p_1 p_2 \dots p_n}}\, a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \cdots a_{np_n}$

±1 a seconda se mi servono un numero pari o dispari di scambi per portare P ad essere l'identità

Ogni addendo è



Matrici 2x2: $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

Matrici 3x3 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

4x4: non c'è una formula "con le diagonali"

apr 23-10:54

3) Formula con i cofattori (formula di Laplace)

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \det\begin{bmatrix} \boxed{a} & 0 & 0 \\ d & \boxed{e} & \boxed{f} \\ g & \boxed{h} & \boxed{i} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & \boxed{b} & 0 \\ \boxed{d} & e & \boxed{f} \\ \boxed{g} & h & \boxed{i} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{c} \\ \boxed{d} & \boxed{e} & f \\ \boxed{g} & \boxed{h} & i \end{bmatrix}$$

Quali addendi sono nonzero?

$aei - afh \qquad bfg - bdi \qquad cdh - ceg$

$a(ei - fh) \qquad b(fg - di)$

$$a \cdot \det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \cdot \det\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \cdot \det\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

La dipendenza dalla prima riga $[a \ b \ c]$ è quella che ci aspettiamo da una f. lineare: $a \cdot \boxed{\text{cosa}} + b \cdot \boxed{\text{cosa}} + c \cdot \boxed{\text{cosa}}$

Stessa cosa funziona per una matrice generica $n \times n$:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot C_{1j}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$C_{ij} = (-1)^{i+j}$ determinante della matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta da A levando la i-esima riga e la j-esima colonna

È facile dire quando $(-1)^{i+j}$ fa più o meno 1:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & & \\ + & - & + & - & + & \ddots & \\ - & + & - & + & - & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \end{bmatrix}$$

Sono messi a scacchiera, in alto a sinistra c'è +

La stessa cosa funziona su ogni riga:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij} \qquad \text{per ogni } i=1,2,\ldots n}$$

formula con i cofattori (Laplace)

Esempio:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&4\end{bmatrix}$$

Con la formula con le diagonali

$$\det A = \underline{2\cdot3\cdot4} - 1\cdot1\cdot2 - 1\cdot1\cdot4 = 24-2-4=\boxed{18}$$

Con la formula coi cofattori sulla prima riga:

$$\det A = \underbrace{2}_{a_{11}}\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}3&1\\1&4\end{bmatrix}}_{C_{11}} \underbrace{+1}_{a_{12}}\cdot\underbrace{\left(-\det\begin{bmatrix}1&1\\0&4\end{bmatrix}\right)}_{C_{12}}\underbrace{+0}_{a_{13}}\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}}_{C_{13}}=$$

$$= 2\cdot(12-1) - 1\cdot4 + 0\cdot1 = 22-4=18$$

Cofattori sulla seconda riga:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&4\end{bmatrix} \qquad \det A = 1\cdot\left(-\det\begin{bmatrix}1&0\\1&4\end{bmatrix}\right)+3\cdot\det\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}+1\cdot\left(-\det\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}\right)=$$

$a_{21}\cdot(-1)^{2+1}\cdot\det\ldots$

$$= -4 \qquad 3\cdot8 \qquad -2 = 18$$

apr 23-11:32

Nel caso generico, costa ancora $n!$

(per un det $n \times n$ ne servono n del tipo $(n-1)\times(n-1)$, $costo_n = \Theta(n!)$)
(se le calcolate con i cofattori)

È comodo quando ho tanti zeri in una riga, es.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det A \overset{\text{sulla prima riga}}{=} 0 \cdot \ldots + 1 \cdot -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots =$$

$= \ldots$ Posso continuare, mi conviene sempre prendere la riga con più zeri.

Altre proprietà dei determinanti:

- Determinante del prodotto: se $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, allora

$$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$$ (Teorema di Binet)

Corollario... se A o B sono singolari, allora anche $A\cdot B$ è singolare

Potevamo dirlo anche prima: B singolare $\Rightarrow$ esiste $v \neq 0$ tale che $B\cdot v = 0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow A\cdot B\cdot v = 0$ $\Rightarrow$ esiste $v \neq 0$ tale che $(AB)v = 0$
$\Rightarrow$ AB singolare

Corollario: se A invertibile, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Perché? Perché dev'essere $\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det(A\cdot A^{-1}) = \det I = 1$

Come si dimostra che $\det(AB) = \det A \cdot \det B$? (Idea)

Si prende $f(X) = \dfrac{\det(XB)}{\det(B)}$ $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, ha tutte le stesse proprietà di det.

Fatto: se P matrice di permutazione, $\det P = \det P^T$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cosa interessante: se P matrice di permutazione, $P^{-1} = P^T$

Perché?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La i-esima riga di P è la i-esima colonna di P^T

cioè, hanno 0 e 1 nella stessa posizione;

se faccio il prodotto scalare tra la i-esima riga di P e la i-esima colonna di P^T ottengo 1

Se invece prendo la i-esima riga e la j-esima colonna, $i \neq j$, gli uni sono in pos. diversa, e viene 0.

Se P ha det 1, $P^{-1} = P^T$ ha det $\frac{1}{1} = 1$, " -1 " -1.

In generale, è vero che $\boxed{\det A = \det A^T}$ per qualunque matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$

$$\det A = \underbrace{\dots + a_{12}\,a_{31}\,a_{34}\,a_{42}\,\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n!\ \text{addendi}} + \dots$$

$$\det A^T = \underbrace{\dots + a_{12}\,a_{31}\,a_{34}\,a_{42}\,\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{n!\ \text{addendi, che sono gli stessi a parte } \det P \text{ vs. } \det P^T}$$

Tutte le proprietà di det che parlavano di "righe" sono vere anche con "colonne"

- se A ha 2 colonne uguali, $\det A = 0$
- se fate mosse di Gauss su colonne, $\det A$ non cambia
- det lineare sulle colonne
- se scambio due colonne, det si moltiplica per -1.

apr 23-12:10

→ Formula con i cofattori: $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$ Per ogni $j = 1, .. n$

→ $\det A$ = prodotto degli el. sulla diagonale se A è triangolare <u>inferiore</u>

<u>Esempio</u>: Matrice di prima, formula con i cofattori su una colonna

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \det A = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -4 + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = -4 + 24 - 2 = 18$$

(ok, non è un grande esempio perché $A = A^T$)

Esempio/esercizio
Costruiamo la matrice C che ha C_{ij} come elementi.

Ad es., per la A di prima, $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&4\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}11&-4&1\\-4&8&-2\\1&-2&4\end{bmatrix}$

Cosa succede se faccio $A\cdot C^T$?

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}C_{11}&C_{21}&C_{31}\\C_{12}&C_{22}&C_{32}\\C_{13}&C_{23}&C_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\det A&0&0\\0&\det A&0\\0&0&\det A\end{bmatrix}=\det A\cdot I$$

Gli elem. sulla diagonale sono uguali a $\det A$, per la formula sui cofattori

Gli elem. fuori dalla diagonale sono il determinante di un'altra matrice calcolato con i cofattori:

$$\text{elemento 3,1 del prodotto} = \det\underbrace{\begin{bmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}}_{A''}$$

← per questa matrice, C_{11}, C_{12}, C_{13} sono uguali a quelli di A

(calcolato con cofattori sulla prima riga)

La matrice ha due righe uguali, quindi $\det A''=0$

Quindi, abbiamo dimostrato che $A \cdot C^T = \det A \cdot I$.

(Per casa: controlla che per una 2x2 diventa $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad-bc) \cdot I$)

Qual è il determinante delle matrici di eliminazione?

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\frac{a_{32}}{a_{22}} & \ddots & \\ & -\frac{a_{42}}{a_{22}} & & \ddots \\ & \vdots & & & 1 \\ & -\frac{a_{n2}}{a_{22}} & & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & 1 & & 0 \\ 0 & * & & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ 0 & * & & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sono tutti 1 (perché? Triang. inferiori, ma anche basta fare elim. Gauss)

Un passaggio di el. Gauss corrisponde a

$$A \longrightarrow L \cdot A$$

Quindi

$$\det A = (\det L)(\det A),$$

stiamo dicendo in un altro modo che le mosse di Gauss non cambiano il determinante

ES: Quanto fa il determinante di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & a_{i1} & & \\ & 1 & & a_{i2} & & \\ & & 1 & a_{i3} & & \\ & & & \boxed{a_{ii}} & & \\ & & & a_{i5} & 1 & \\ & & & a_{i6} & & 1 \end{bmatrix} ?$$

(Uguale a un'identità tranne una colonna)?

Fa l'elemento sulla diagonale, a_{ii}

- se $a_{ii} = 0$, ho una riga di zeri
- se $a_{ii} \neq 0$, elim. di Gauss mi dà

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & & & 0 & & & \\ & \boxed{1} & & & & 0 & \\ & & \boxed{1} & 0 & & & \\ & & & a_{ii} & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & & \boxed{1} & \\ & & & 0 & & & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Oppure, per avere nonzero devo prendere una permutazione che abbia l'elemento 1 della prima colonna, 2 della seconda, ... quindi a_{ii} è "obbligato"

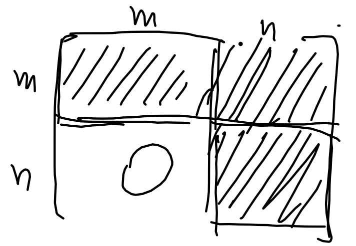
Oppure, cofattori

Oppure, cofattori sulla i-esima riga

- dimostrare che una matrice 3×3 del tipo $\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ (zeri dappertutto tranne che ultima riga e colonna)

  è singolare

- Quanto fa $\det \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{bmatrix}$?

  Riuscite a dire quanto fa in generale  ?

- Quanto fa $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$? $(a_{ij} = 1$ se $|i-j| = 1$, 0 altrimenti$)$

  (Idea: prova i casi piccoli, induzione forte)