Martedì 5 → no lezione (Capoccioli)

Giovedì 7 → se volete, corso A da Gaiffi

Venerdì 15 → lezione recupero A, 9:11

~~ES~~: Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ a+1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

è invertibile?

$$\det A = -2a^2 - 2 + a(a+1) = -2a^2 - 2 + a^2 + a =$$

$$= -a^2 + a - 2$$

A è singolare se $\det A = 0$

$$-a^2 + a - 2 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \begin{cases} \underline{2} \\ \underline{-1} \end{cases}$$

A è singolare per $a = -1$ e $a = 2$, e invertibile altrimenti

---

= Autovalori, autovettori =

Hanno senso solo per applicazioni da uno spazio vettoriale in sé stesso

$f: V \to V$, associate a matrici quadrate

Applicare f due volte $f(f(v))$ corrisponde a moltiplicare $A \cdot A = A^2$

$A^2, A^3, A^4, \dots \quad A^{100}, \dots$

Idea: considero vettori che hanno un comportamento prevedibile

Data $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$, $v \in \mathbb{K}^n$ si dice <u>autovettore</u> di A se $A \cdot v$ è un multiplo di v, cioè $A \cdot v = \lambda v$ per un certo numero $\lambda \in \mathbb{K}$

<u>e</u> $v \neq 0$ (altrimenti $v = 0$ sarebbe sempre autovettore)

Il numero λ si dice <u>autovalore</u> associato a v.

apr 28-14:14

Esempi: • se $A=I$, allora ogni $v\neq 0$ è autovettore con autovalore 1 (perché $I\cdot v=v$)

• Se $v\in \operatorname{Ker} A$, allora $A\cdot v=0\cdot v$, cioè v è autovettore di A con autovalore 0

Come si fa a trovare autovettori di matrici più complicate, per es. $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$

Troviamo prima gli autovalori: esiste un autovettore v di autovalore λ se (e solo se) $Av=\lambda v$

$\iff \exists v$ t.c. $(A-\lambda I)v=0 \iff A-\lambda I$ è singolare

$\iff \det(A-\lambda I)=0$

$\det(A-\lambda I)=0$ è un'equazione per λ, posso trovare per quali λ è risolubile

ES: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 4-\lambda\end{bmatrix}=$

$$=(1-\lambda)(4-\lambda)-4=\cancel{4}-5\lambda+\lambda^2-\cancel{4}=\lambda(\lambda-5)$$

$\mathrm{Det}(A-\lambda I)=0$ se e solo se $\lambda=0$ oppure $\lambda=5$

$\lambda=0$ e $\lambda=5$ sono i soli autovalori di A

Come facciamo a trovare autovettori associati?

$\boxed{\lambda=0}$ $A-\lambda I=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ qual è $\ker A$?

$\ker A=\mathrm{span}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$

apr 28-14:25

Quindi $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e tutti i suoi multipli sono autovettori di A di autovalore 0

$$A \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \qquad A \cdot v = \lambda \cdot v$$

→ Gli autovettori sono sempre definiti a meno di multipli: se $Av = \lambda v$, allora $Aw = \lambda w$ se w è un multiplo di v

$\boxed{\lambda = 5}$ Trovo gli autovettori associati

$$\operatorname{Ker} A - 5I = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

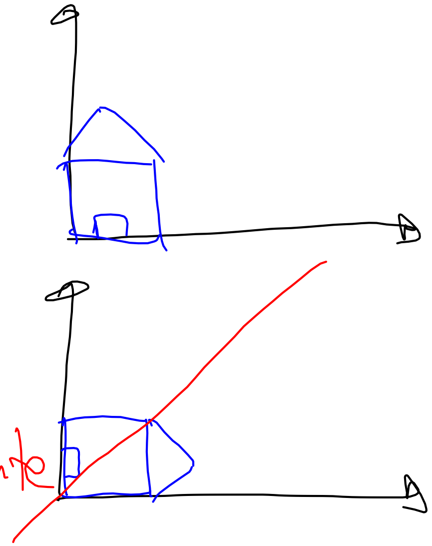
Gli autovettori di autovalore 5 sono $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ e tutti i suoi multipli. (non nulli)

Procedimento generale per trovare autovettori e autovalori di una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$

1) Risolvo l'equazione $\det[A-\lambda I]=0$, le sue soluzioni sono gli autovalori

2) Per ogni λ_i soluzione di quest'equazione, calcolo $Ker(A-\lambda_i I)$, e tutti i vettori (non nulli) di questo sottospazio sono autovettori di autovalore λ. (ce n'è sempre almeno 1)

Altro esempio: $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



B scambia coordinate: $B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$

simmetria rispetto alla bisettrice del 1-3 quadrante

Autovalori e autovettori di B?

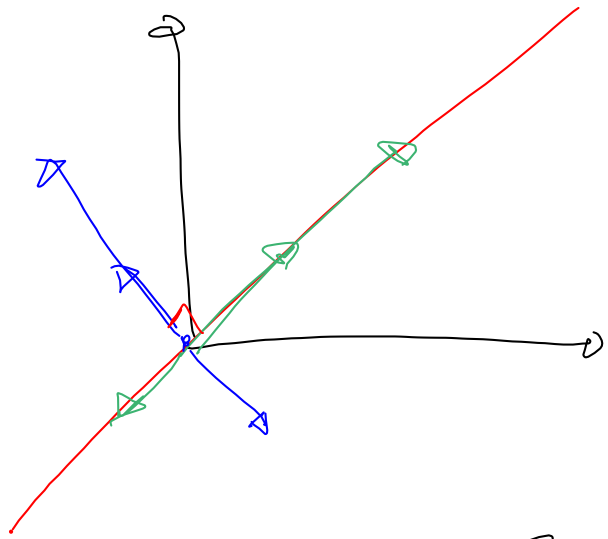
Risolvo $0 = \det(B - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$

$= \lambda^2 - 1$ soluzioni: $+1$, -1

$\boxed{\lambda = +1}$: Autovettori di autovalore 1: $\operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\boxed{\lambda=-1}$ $\ker(B+1)=\ker\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)=\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$

Geometricamente,



I multipli di $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ restano invariati, $Av=v$

I multipli di $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ vengono moltiplicati per -1,

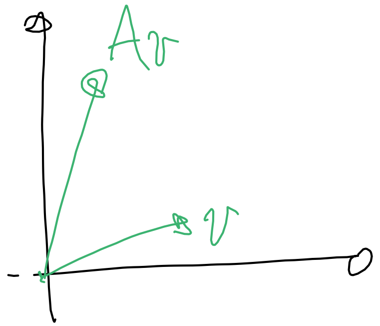
$Av=-v$

Perché autovalori e autovettori ci aiutano a capire il comportamento delle potenze di A?

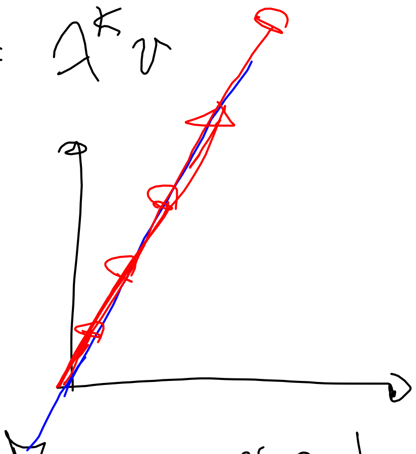
Se $Av=\lambda v$, allora

$$A^2v=A(Av)=A\lambda v=\lambda Av=\lambda^2 v$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, $A^k v = \lambda^k v$



In generale v e Av non sono collegati



Ma se v autovettore, Av sta sulla stessa linea e $A^k v = \lambda^k v$

Prendiamo di nuovo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, con autovettori

$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ di autoval. $\lambda_1 = 0$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ di autoval. $\lambda_2 = 5$

La matrice A^{100} è tale che $A^{100} v_1 = \lambda_1^{100} v_1$

e $A^{100} v_2 = \lambda_2^{100} v_2$

Visto che (v_1, v_2) sono una <u>base</u> di $\mathbb{R}^2$, questo mi determina completamente la matrice A^{100}

Se voglio sapere quanto fa $A^{100} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, mi basta scrivere $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto alla base (v_1, v_2), cioè

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{array}\right] \qquad x_2 = \frac{1}{5}$$

e poi ho

$$A^{100} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = A^{100} \left(\frac{3}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \frac{3}{5} A^{100} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} A^{100} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 + \frac{1}{5} 5^{100} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se riesco a fare una base di autovettori, allora A in quella base è diagonale:

se $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$, ... $Av_n = \lambda_n v_n$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{array}$$

Teorema: Data $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ e $v_1, v_2, \dots v_k$ autovettori relativi ad autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ (cioè $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$), allora $v_1, v_2, \dots v_k$ sono linearmente indipendenti.

Dim: $\boxed{\text{Caso facile } k=2}$

Prendo una comb. lineare $x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$, (1)

e voglio dimostrare $x_1 = x_2 = 0$

Moltiplico (1) per A: $0 = A(x_1 v_1 + x_2 v_2) = \underline{x_1 \lambda_1 v_1 + x_2 \lambda_2 v_2}$ (2)

Moltiplico (1) per λ_1: $0 = \lambda_1(x_1 v_1 + x_2 v_2) = \underline{x_1 \lambda_1 v_1 + x_2 \lambda_1 v_2}$ (3)

Sottraggo (2) da (3): $x_2 \underline{(\lambda_1 - \lambda_2)} \underline{v_2} = 0$

$\neq 0$ perché autovettore

$\neq 0$ per ipotesi

Dev'essere $x_2 = 0$

Rifacendo lo stesso ragionamento con x_1, x_2 scambiati,

ottengo anche $x_1 = 0$.

Caso generico:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = 0 \quad (1)$$

Moltiplica (1) per A: $\underline{x_1 \lambda_1 v_1} + x_2 \lambda_2 v_2 + \dots + x_k \lambda_k v_k = 0 \quad (2)$

Moltiplica (1) per λ_1: $\underline{x_1 \lambda_1 v_1} + x_2 \lambda_1 v_2 + \dots + x_k \lambda_1 v_k = 0 \quad (3)$

Sottrai (3)-(2): $x_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + x_3(\lambda_3 - \lambda_1) v_3 + \dots + x_k(\lambda_k - \lambda_1) v_k = 0 \quad (4)$

Moltiplica (4) per A : $x_2(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2 v_2 + x_3(\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_3 v_3 + \dots = 0 \quad (5)$

Moltiplica (4) per λ_2 : $x_2(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2 v_2 + x_3(\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_2 v_2 + \dots = 0 \quad (6)$

Sottrai (6)-(5) : $0 + x_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) v_2 + \dots = 0$

$\square$

1) Risolvo $\det(A-\lambda I)=0$

2) Per ogni sol. λ_i, trovo un vettore non nullo in $\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)$

L'equazione di (1) è (un polinomio di grado n) $=0$

Se ho n soluzioni distinte, (2) produce un autovettore per ognuno dei λ_i $\Rightarrow$ n autovettori con λ_i distinti

Per il teorema sono lin. indipendenti $\Rightarrow$ sono una base (perché sono n)

Cosa può andare storto?

(a) Non ci sono n soluzioni distinte: per esempio

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad \det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2+1=0$$

$\det(A-\lambda I)=0$ non ha radici reali (dovrei passare ai complessi)

devo lavorare su $\mathbb{C}^n$ per avere soluzioni

(b) soluzioni multiple: esempio: $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}2-\lambda & 1\\ 0 & 2-\lambda\end{bmatrix}=(2-\lambda)^2=0$$

soluzione doppia $\underline{\lambda=2}$

$$\mathrm{Ker}(A-\lambda I)=\mathrm{Ker}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathrm{span}\left\{\underline{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}}\right\}$$

(invece, $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ ha una base di autovett.)

→ Gli autovalori e autovettori cambiano se fate mosse di Gauss: esempio:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ha autoval. 0 e 5

Se faccio el. Gauss,

$A \to R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(R - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 1)$

autovalori $\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Cos'è successo?

Passo di Gauss: $R = LA$

apr 28-15:44

$$Ax = \lambda x$$

$$(LA)x = \lambda Lx$$ ~~a~~ non ho più lo stesso vettore

Però, potrei dire che

$$(LAL^{-1})Lx = \lambda \cdot Lx$$

Se x è un autovettore di A, Lx è un autovettore di LAL^{-1}