$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Idea: vediamo questo calcolo in termini di algebra lineare (autovalori/vettori)

$F_n \mapsto F_{n+1}$ non è lineare $n \mapsto F_n$

$$\begin{matrix}F_n\\F_{n-1}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}F_{n+1}\\F_n\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}F_{n+2}\\F_{n+1}\end{matrix}$$

$$X_n = \begin{bmatrix}F_n\\F_{n-1}\end{bmatrix}$$

<u>stato</u> al tempo n

apr 30-10:52

La mappa $X_n \to X_{n+1}$ è lineare

$$X_{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}}_{X_{n+1}} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix}}_{X_n}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X_2 = AX_1 \qquad X_3 = AX_2, \quad X_4 = AX_3 \ldots \quad X_{k+1} = A^k X_1$$

per ogni $k \geq 0$

Chi è F_{100}? Per calcolarlo, posso fare $X_{100} = A^{99} X_1$

apr 30-11:09

Calcoliamo autovalori/vettori di A

$$\det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix}\right) = \lambda(\lambda-1)-1 =$$

$$= \lambda^2-\lambda-1 = 0$$

Soluzioni $\det(A-\lambda I)=0$ sono $\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Autovettori: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \lambda_1 I\right) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix}1-\lambda_1 & 1\\ 1 & -\lambda_1\end{bmatrix} = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}\lambda_1\\ 1\end{bmatrix}\right)$

multiple una dell'altra

$$v_1 = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ 1\end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} - \lambda_2 I\right) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix}1-\lambda_2 & 1\\ 1 & -\lambda_2\end{bmatrix} = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}\lambda_2\\ 1\end{bmatrix}\right)$

$$v_2 = \begin{bmatrix}\lambda_2\\ 1\end{bmatrix}$$

So come si comportano le potenze di A su v_1, v_2:

$$A^{99} v_1 = \lambda_1^{99} v_1 \qquad A^{99} v_2 = \lambda_2^{99} v_2$$

Per sapere come si comportano su $x_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, scrivo

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = x_1 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt5}}\begin{bmatrix}\lambda_1\\1\end{bmatrix} - \underline{\frac{1}{\sqrt5}}\begin{bmatrix}\lambda_2\\1\end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\\ \frac{1}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

(Stessa eq. dell'altro metodo: $x_n = y_1 \cdot \lambda_1^n + y_2 \cdot \lambda_2^n$)

Chi è F_{100}? Il primo elemento di $A^{99} x_1 = A^{99}\Big(\overbrace{\frac{1}{\sqrt5}v_1 - \frac{1}{\sqrt5}v_2}^{x_1}\Big) = \frac{1}{\sqrt5}A^{99}v_1 - \frac{1}{\sqrt5}A^{99}v_2 =$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\lambda_1^{99}\begin{bmatrix}\lambda_1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt5}\cdot\lambda_2^{99}\begin{bmatrix}\lambda_2\\1\end{bmatrix}$$

Formula per l'n-esimo Fibonacci $\longrightarrow$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\left(\lambda_1^{100} - \lambda_2^{100}\right)\\ \frac{1}{\sqrt5}\left(\lambda_1^{99} - \lambda_2^{99}\right)\end{bmatrix}$$

apr 30-11:19

Perché è comodo pensarlo così?

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n + B_{n-1} \\ B_{n+1} = B_n + 2B_{n-1} + 5A_n \end{cases}$$

"stato" $X_n = \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ B_{n-1} \end{bmatrix}$ $X_n \mapsto X_{n+1}$ è lineare ...

Trovare autovalori = trovare zeri di $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Def: Polinomio caratteristico di $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ è $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Sia $p(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/_{17}\mathbb{Z}, \dots)$

Caso più facile: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Ogni polinomio di grado d si scrive come $p(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_d)$

per certi $c, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_d \in \mathbb{C}$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_d$ sono gli zeri del polinomio, $p(\lambda_i) = 0$ per $i = 1, 2, \dots d$

apr 30-11:26

Oss: λ_i possono essere ripetuti, es. $p(\lambda)=(\lambda-2)^2=\lambda^2-4\lambda+4$

$$p(\lambda)=1\cdot\underset{\lambda_1}{(\lambda-2)}\underset{\lambda_2}{(\lambda-2)}$$

$\lambda_1 = \lambda_2$

Es: $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x+i)(x-i)$

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=-1 \quad \lambda_3=-i \quad \lambda_4=i$

Su altri campi, questo non succede, es.

x^5-2 non ha soluzioni in $K=\mathbb{Q}$

x^2+1 non ha soluzioni in $K=\mathbb{R}$

Il numero di volte che compare un valore fra i λ_i si chiama **molteplicità** (di uno zero di un polinomio)

"zero di un polinomio": valore λ_i tale che $p(\lambda_i)=0$

Es: $p(\lambda)=5\cdot(\lambda-\sqrt{5})^3(\lambda-2)(\lambda+\pi)^4$

$\sqrt{5}$ ha molteplicità 3

2 ha molteplicità 1

$-\pi$ ha molteplicità 4

apr 30-11:34

$p(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ di grado d ha al più d zeri

(Ne ha esattamente d complessi, qualcuno è reale, qualcuno no)

Def: Il coniugato del numero complesso $z = a+bi$ è $\bar{z} = a - bi$

es: $z = 3+4i$ $\quad \bar{z} = 3-4i$

(*) Teo: Se $z \in \mathbb{C}$ è uno zero di un polinomio a coefficienti reali $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, allora anche $\bar{z}$ è uno zero

(Oss: per coefficienti in $\mathbb{C}$ non va bene: es: $p(x) = (x - 3+4i)(x+2)$)

Proprietà del coniugato: 1) $\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c) - (b+d)i$

$\overline{(a+bi)} + \overline{(c+di)} = (a-bi)+(c-di)$

2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ $\quad \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = (ac-bd) - i(ad+bc)$

...

3) $\bar{\bar{z}}_1$

4) $z = \bar{z}$ se e solo se $z \in \mathbb{R}$

Dim del teorema (*): $p(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ per ogni i

$z \in \mathbb{C}$ tale che $0 = p(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0$

$$0 = \bar{0} = \overline{p(z)} = \overline{a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{a_d z^d} + \overline{a_{d-1} z^{d-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} =$$

$a_i = \bar{a}_i$ perché a_i reali

$$= \bar{a}_d \bar{z}^d + \bar{a}_{d-1} \bar{z}^{d-1} + \dots + \bar{a}_1 \cdot \bar{z} + \bar{a}_0 = a_d \bar{z}^d + a_{d-1} \bar{z}^{d-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = p(\bar{z})$$

[ES $\overline{2(3+5i)^2 + 1 \cdot (3+5i) + 5} = 2(3-5i)^2 + 1(3-5i) + 5$]

Gli zeri di un polinomio reale sono:
- reali
- coppie di complessi coniugati

ES. $X^4 - 1 = \underbrace{(X+1)}_{\text{reale}} \underbrace{(X-1)}_{\text{reale}} \underbrace{(X+i)(X-i)}_{\text{complessi coniugati}}$

$$P(x) = C\cdot\underbrace{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_{d-2s})}_{\text{reali}}\underbrace{(x-z_1)(x-\overline{z_1})}_{\text{coniugati}}\underbrace{(x-z_2)(x-\overline{z_2})}_{\text{coniugati}}\cdots\underbrace{(x-z_s)(x-\overline{z_s})}_{\text{coniugati}}$$

$2s$

$(x-z_i)(x-\overline{z_i})$ è un polinomio a coefficienti reali

$$= x^2 - \underbrace{(z_i+\overline{z_i})}_{\text{reale}}x + \underbrace{z_i\overline{z_i}}_{\text{reale}}$$

reale (perché se li coniugate, resta la stessa cosa)

Di nuovo formule per scrivere applicazioni lineari / matrici in altre basi

Matrice associata a $f(v) = Av$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ secondo la base canonica è A

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \underline{a} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{b} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema più semplice: data un'altra base $(v_1, v_2, \dots v_n)$ di $\mathbb{R}^n$, quali sono le coordinate (coefficienti di base) di un vettore w secondo la base $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$?

$$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \quad \text{equivale a} \quad V \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = w$$

dove $V = \begin{bmatrix} v_1, v_2, \dots v_n \end{bmatrix}$

apr 30-12:07

$$B = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \left[\begin{matrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix}\right] \end{array}$$

Se l'applicazione lineare è $f(v) = Av$, $\{v_1, v_2 \ldots v_n\}$ base in partenza e arrivo

$Av_1, Av_2, \ldots Av_n$ sono le colonne di AV

Scrivere le colonne di AV secondo la base v_i, vuol dire risolvere il sistema lineare $Vx = w$ per ogni colonna w di AV

cioè, prendere $x = V^{-1}w$ per ogni colonna w di AV

Cioè, $B = V^{-1}(AV) = V^{-1}AV$

Se $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ rappresenta $f(v) = Av$ rispetto alla base canonica, la matrice associata a f in un'altra base $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ (in partenza e in arrivo) è $B = V^{-1}AV$

dove $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$.

Al contrario, $A = VBV^{-1}$

In particolare, se $v_1, v_2, \dots v_n$ sono autovettori di autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$,
allora $A = VBV^{-1}$ con $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale

Se A ha n autovettori lin. indipendenti, A è diagonale nella base degli autovettori:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^{-1}$$

Se questo succede, A si dice <u>diagonalizzabile</u>

<u>Def</u>: A <u>diagonalizzabile</u> se c'è una base $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ di autovettori di A

Abbiamo visto che se A ha n autovalori distinti, allora gli autovett. relativi sono lin. indipendenti e A è diagonalizzabile

apr 30-12:24

Es: $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ha autovalori $1, 2, 3 \longrightarrow$ è diagonalizzabile

" " $-5, 1+2i, 1-2i \longrightarrow$ è diagonalizzabile

" " $1, 2, 2 \longrightarrow$ chissà

(Il "prototipo" della matrice non diagonalizzabile è

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & & 0 \\ & a & 1 & \\ & & a & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & a \end{bmatrix}.$$

Questa matrice ha solo a come autovalore, perché

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & 1 & & 0 \\ & a-\lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & a-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)^n,$$

soluzione a con molteplicità n

molteplicità algebrica n

Però,

$$\ker(A - aI) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

molteplicità geometrica 1

manca pivot sulla prima colonna

Def **Molteplicità algebrica** di un autovalore λ: molteplicità di λ come zero di $p(x) = \det(A - xI)$.

Molteplicità geometrica di un autovalore λ: quanti autovettori lin. indipendenti associati a λ ci sono, $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.

Osservazione: un altro modo di vedere la manipolazione fatta sui Fibonacci a inizio lezione è:

se $A = \underbrace{V}_{\text{autovettori di } A}\underbrace{D}_{\text{autovalori di } A}V^{-1}$, allora $A^K = \underbrace{VD\cancel{V^{-1}}\cancel{V}D\cancel{V^{-1}}\cancel{V}D\cancel{V^{-1}}\cdots\cancel{V}DV^{-1}}_{K \text{ volte}} = \underbrace{V}_{\text{autovett. di } A^K}\underbrace{D^K}_{\text{autovalori di } A^K}V^{-1}$

$$\det A = \det(VDV^{-1}) = \det V \cdot \det D \cdot \det V^{-1} = \det D = \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

uno l'inverso dell'altro

$$\boxed{\det A = \text{prodotto degli autovalori di } A}$$

Oss: det A = prodotto autovalori
$= \pm$ prodotto dei pivot (ottenuti dopo $A \to R$ elim. Gauss)

Occhio: gli elementi sulla diagonale di R non sono gli autovalori

Def: Traccia di una matrice A è la somma degli elementi sulla diagonale

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $\operatorname{Tr} A = 1+5+9$

Oss: La traccia di A è uguale alla traccia di $B = V^{-1}AV$ per ogni V invertibile (non dimostrato)

In particolare, se V = autovettori,

$$\operatorname{Tr} A = \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}_{\text{somma degli autovalori (contati con molteplicità)}}$$

apr 30-12:47