$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ Calcolare autovalori e autovettori

1) Polinomio caratteristico $p(x) = \det(A - xI) = \det \begin{bmatrix} 2-x & 1 & -1 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{bmatrix}$

Sviluppo di Laplace

$$= (2-x)\det\begin{bmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{bmatrix} - \cancel{0 \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1-x \end{bmatrix}} + \cancel{0 \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1-x & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= (2-x)\left((1-x)^2 - 1\right) = (2-x)(\cancel{1} - 2x + x^2 \cancel{-1}) = (2-x) \times (-2+x) =$$

$$= \boxed{-x^3 + 4x^2 - 4x}$$

$$= -(x-2)^{\boxed{2}}(x-0)^{\boxed{1}}$$

coefficiente, radice, radice; molteplicità, molteplicità

$Av = \lambda v$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ $\mathrm{Ker}(A - 2I) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{autospazio}} \right\}$

ogni elemento $\neq 0$ è un autovettore

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Ker}\, R = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 0} \quad \mathrm{Ker}(A - 0\cdot I) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Chi sono gli autovalori / vettori di $B = A - 5I$?

Se $Av = \lambda v$, allora $(\underbrace{A - 5I}_{B})v = Av - 5v = (\lambda - 5)v$

Se (λ, v) è una coppia autoval / vett di A, allora $(\lambda - 5, v)$ è una coppia autoval / vett. di B

mag 12-14:18

Chi sono gli autoval/vett di $C=A^2$?

Se (λ, v) coppia autoval/vett. di A, allora $A^2 v = A\cdot(Av) = A\cdot \lambda v = \lambda \cdot Av =$
$= \lambda^2 v$

(λ^2, v) è una coppia autoval/vett. di $C=A^2$

Possono essercene altri? No

Data una base $v_1, v_2, \dots v_n$ di $\boxed{K^n}$, la matrice associata a $f(y)=Ay$ spazio dei vettori a n elementi e entrate in K

in quella base è $V^{-1}AV$, dove

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{bmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è

il prodotto fa 1

$$P_{V^{-1}AV}(x) = \det(V^{-1}AV - x\underset{\substack{\parallel \\ V^{-1}V}}{I}) = \det(V^{-1}(A-xI)V) = \det V^{-1} \cdot \det(A-xI)\cdot \det V =$$

$$= \det(A-xI) = P_A(x)$$

Il polinomio caratteristico non dipende dalla base usata per la matrice

Oss: in particolare $p_{V^{-1}AV}(0) = p_A(0)$

$$\underset{\det V^{-1}AV}{\underbrace{p_{V^{-1}AV}(0)}} = \underset{\det A}{\underbrace{p_A(0)}}$$

La stessa cosa vale per la traccia $tr(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33} + \dots + A_{nn}$

Questa cosa è vera perché la traccia è un coefficiente del pol. caratteristico:

$$p_A(x) = \det \begin{bmatrix} \boxed{A_{11}-x} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \boxed{A_{22}-x} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{n1} & \cdots & & \boxed{A_{nn}-x} \end{bmatrix}.$$

Come facciamo a ottenere termini del tipo $a \cdot x^{n-1}$?

Solo se prendo $\geq n-1$ volte un elemento sulla diagonale

L'unico elemento della sommatoria di $n!$ termini che contiene x con grado almeno $n-1$ è $(A_{11}-x)(A_{22}-x)\cdots(A_{nn}-x)$.

Espandendo $(A_{11}-x)(A_{22}-x)\cdots(A_{nn}-x)$, qual è il coefficiente di x^{n-1}?

Devo prendere x da ogni parentesi tranne una: quindi viene

$$A_{11}\underbrace{(-x)\cdot(-x)\cdots(-x)}_{n-1 \text{ volte}} + (-x)A_{22}(-x)(-x)\cdots(-x) + \dots (-x)(-x)\cdots(-x)A_{nn} = \overbrace{(A_{11}+A_{22}+\dots+A_{nn})}^{\text{Traccia}}(-x)^{n-1}$$

Es. $n=3$

$$\det\begin{bmatrix} A_{11}-x & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & A_{22}-x & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & A_{33}-x \end{bmatrix} =$$

Qual è il coefficiente di x^2?

$$= (A_{11}-x)(A_{22}-x)(A_{33}-x) + (\text{termini con } 0 \text{ oppure una } x)$$

$$= -x^3 + \underbrace{(A_{11}+A_{22}+A_{33})}_{\mathrm{Tr}\,A}x^2 + (\ldots \text{ termini con } 0 \text{ o una } x)$$

$$p_A(x) = \det(A - xI) = c\cdot(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}(x-\lambda_3)^{m_3}\cdots(x-\lambda_e)^{m_e}$$

grado n

$$\boxed{n = m_1 + m_2 + \cdots + m_e}$$

Chi è c? È il coefficiente di x^n: $p_A(\lambda) = \underline{c}x^n + \ldots$ (termini di grado inferiore)

Come faccio ad ottenere x^n in $\det\begin{bmatrix} A_{11}\boxed{-x} & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & A_{22}\boxed{-x} & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & A_{nn}\boxed{-x} \end{bmatrix}$?

Devo prendere <u>tutte</u> le x: Coefficiente $(-1)^n x^n$ $\quad c=(-1)^n$

Coefficiente del termine di grado $n-1$:

Devo prendere $n-1$ volte il fattore x da $(-1)^n \overbrace{(x-\lambda_1)(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_1)}^{m_1}(x-\lambda_2)\cdots =$

$$(-1)^n \underbrace{\overbrace{(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_1)}^{m_1}(x-\lambda_2)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_3)\cdots(x-\lambda_n)}_{n \text{ termini in totale}}$$

Per avere grado $n-1$, devo prendere x da ogni parentesi tranne una

Il termine di grado $n-1$ è $-(-1)^n x^{n-1}(\underbrace{\lambda_1+\lambda_1\cdots+\lambda_1}_{m_1}+\underbrace{\lambda_2+\cdots\lambda_2}_{m_2}+\cdots+\underbrace{\lambda_n\cdots+\lambda_n}_{m_n})$

Questo ci dice che $\mathrm{Tr}\, A =$ somma degli autovalori, ognuno contato con la sua molteplicità <u>algebrica</u>

Analogamente, $\det A =$ prodotto degli autovalori (con molt. algebrica)

Esempio di inizio lezione: $\mathrm{Tr}\, A = 2+2+0 \qquad \det A = 2\cdot 2\cdot 0$

molt. algebrica: numero di volte che $(x-\lambda_i)$ compare nella fatt. del polinomio

molt. geometrica (di un autovalore λ_i) è $\dim \underbrace{\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)}_{\text{autospazio (eigenspace)}}$

Esempio di inizio lezione:

A:	λ_i	2		0	
	molt. alg.	2	+	1	= n
	molt. geom.	2		1	← diagonalizzabile, 3 autovett. lin. indip.

Può però succedere che $m_g(\lambda_i) < m_a(\lambda_i)$

Esempio:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

B:	λ_i	2		0	
	m_a	2	+	1	= n
	m_g	$\boxed{1}$		1	← non diagonalizzabile

non riesco ad avere abbastanza autovett. lin. indipendenti

Teo: sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$, λ_i autovalore di A; allora

$$m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i).$$

dim: m_a dipendono da $p_A(x)$, invarianti per cambiamenti di base

m_g sono dimensioni di sottospazi, anche loro invarianti per cambiamenti di base

Posso scegliere la base in cui faccio i conti.

Scelgo $v_1, v_2, \dots v_{m_g}$ base di $Ker(A - \lambda_i I)$

e la completo a una base di $\mathbb{K}^n$ (con $v_{m_g+1}, \dots v_n$)

Scelgo questa base in cui scrivere la matrice $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{m_g} & v_{m_g+1} & \cdots & v_n \end{bmatrix}$

$$B = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda_i \\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{m_g} & \ast \end{bmatrix}$$

$$A v_1 = \lambda_i v_1$$
$$A v_2 = \lambda_i v_2$$
$$\vdots$$
$$A v_{m_g} = \lambda_i v_{m_g}$$

$$p_A(x) = p_{V^{-1}AV}(x) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda_i & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda_i & \\ & 0 & & * \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda_i-\lambda & & & 0 & \\ & \lambda_i-\lambda & & & * \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i-\lambda & \\ & 0 & & 0 & * \end{bmatrix} \right) \overset{\text{Laplace sulla 1ª colonna}}{=} (\lambda_i-\lambda)\det\begin{bmatrix} \lambda_i-\lambda & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda_i-\lambda)^2 \cdot \det\begin{bmatrix} \lambda_i-\lambda & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i-\lambda \end{bmatrix} = \dots = (\lambda_i-\lambda)^{m_g} \cdot \overbrace{\underbrace{\det(\dots\dots)}_{\text{polinomio in } \lambda}}^{q(\lambda)}$$

$\Rightarrow$ Il polinomio caratteristico ha un fattore $(\lambda_i-\lambda)^{m_g}$

$$m_a(\lambda_i) \geq m_g(\lambda_i)$$

potrei avere altre radici λ_i in $q(\lambda)$.

$\square$

Oss: se A è una matrice reale $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$,
allora i suoi autovalori non reali vengono a coppie complesse coniugate

$$p_A(x) = \text{polinomio a coeff. reali} = c\cdot \underbrace{(x-x_1)\cdots(x-x_r)}_{\text{radici reali}}\ \underbrace{(x-z_1)(x-\bar{z}_1)(x-z_2)(x-\bar{z}_2)\cdots}_{\text{radici complesse a coppie compl. coniugate}}$$

Come sono fatti gli autovettori relativi a due autovalori complessi coniugati?

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 \qquad A v_2 = \lambda_2 v_2, \qquad \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$$

In che rapporto sono v_1, v_2?

v_1 sarà ottenuto con il metodo per trovare Kernel su $A - \lambda_1 I \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$
quindi in generale ha elementi complessi

Posso considerare $\overline{v_1}$. Quanto fa $A\overline{v_1}$?

$$A\overline{v_1} = \overline{A}\,\overline{v_1} = \overline{(Av_1)} = \overline{\lambda_1 v_1} = \overline{\lambda_1}\,\overline{v_1} = \lambda_2 \overline{v_1}$$

Ho dimostrato che:

Se λ_1 autovalore di $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ (reale!) con autovettore v_1, allora $\overline{v_1}$ è autovettore con autovalore $\overline{\lambda_1}$.

Es: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Recap... Una matrice $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se...

- $\det A \neq 0$
- n pivot non nulli dopo al. Gauss
- 0 non è un autovalore
- $\operatorname{Ker} A = 0 \iff$ il sistema $Ax = 0$ ha solo la sol. nulla
- $\operatorname{Ker} A^T = 0$
- Il sistema $Ax = b$ ha una e una sola soluzione $\forall\, b \in \mathbb{K}^n$
- A^{-1} esiste (una matrice tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$)
- $\operatorname{Im} A$ ha dimensione n
- le colonne di A sono lin. indipendenti
- $\operatorname{rango}(A) = n = \operatorname{rango}(A^T)$
- $\dim \operatorname{Im} A^T = n$ (lo spazio delle righe ha dimensione n)