• **Domani** 9-11 lezione aula A

$$\underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i} = c(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

$$= c \cdot \prod_{i=1}^{n} (x-\lambda_i)$$

i λ_i possono essere ripetuti (molteplicità)

Anche se a_i sono tutti reali, λ_i possono essere complessi

$$\underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n} = c\,(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n) \quad (*)$$

$$\cdots + a_n x^n = \boxed{c x^n} + \cdots$$

- Allora, $c = a_n$ (coefficiente direttivo)

Talvolta (se mi interessano solo le radici) si impone $a_n = c = 1$, polinomi <u>monici</u>

Dei 2^n termini ottenuti espandendo $(*)$, uno solo senza x, ed è

$$c(-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n) = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \cdot c \quad = a_0$$

Abbiamo dimostrato: $\dfrac{a_0}{a_n} = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

Qual è il coefficiente del termine di grado $n-1$ (in entrambe le scritture)

Sinistra $a_{n-1}x^{n-1}$ Destra: $c\left(-\lambda_1 x^{n-1} + x(-\lambda_2)x^{n-2} + \dots + x^{n-1}(-\lambda_n)\right) =$

$$= c\,x^{n-1}\left(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \dots - \lambda_n\right)$$

Cioè, $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} = -\lambda_1 - \lambda_2 \dots - \lambda_n.$

Probabilmente avete già visto: x^2+bx+c, λ_1, λ_2 radici

$-b$ = somma radici

c = prodotto radici

Coefficiente del termine di grado $n-2$?

Sinistra: $a_{n-2}x^{n-2}$ Destra: $\binom{n}{2}$ addendi, $c\Big[(-\lambda_1)(-\lambda_2)+(-\lambda_1)(-\lambda_3)+\dots+(-\lambda_1)(-\lambda_n)$

$+(-\lambda_2)(-\lambda_3) \dots (-\lambda_2)(-\lambda_n)+\dots$

$\dots + (-\lambda_{n-1})(-\lambda_n)\Big]x^{n-2}$

Termine di grado $n-k$: $a_{n-k}x^{n-k}$: $x^{n-k}\binom{n}{k}$ termini, $c\cdot(-1)^k\cdot$(Tutti i prodotti di k radici)

Esempio: $a_n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) = a_n x^3 - a_n(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x^2$
$+a_n(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)x$
$-a_n\cdot\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

Formule di Viète

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = (-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\lambda_{i_3}\cdots\lambda_{i_k} = \sum_{\boxed{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}$$

Es: $x^3-5x^2+4x+27$, siano a, b, c le sue radici (eventualmente complesse)

allora
$$\begin{cases} a+b+c=5 \\ ab+bc+ca=4 \\ abc=-27 \end{cases}$$

Es: sapreste costruire il polinomio con radici $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$?

I suoi coefficienti devono essere

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{4}{-27} = -b_2 \\ \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{5}{-27} = b_1 \\ \frac{1}{abc} = -\frac{1}{27} = -b_0 \end{cases}$$

Quindi il polinomio con radici $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ è $x^3+b_2x^2+b_1x+b_0 =$

$$= \left(x^3+\frac{4}{27}x^2-\frac{5}{27}x+\frac{1}{27}\right)b_3$$

In particolare, se moltiplico per 27 ho $27x^3+4x^2-5x+1$.

Questo è esattamente il polinomio ottenuto da quello di partenza "leggendo" i coefficienti nell'ordine opposto (da dx a sx)

(Questo succede in generale: dato $p(x)$ di qualunque grado, il polinomio che ha per radici gli inversi delle sue radici si ottiene leggendo i coeff. al contrario)

Posso anche trovare un polinomio con radici a^2, b^2, c^2:

Coefficienti da
$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 5^2 - 2\cdot 4 \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = \text{più complicato} \ldots \\ a^2b^2c^2 = (abc)^2 = (-27)^2 \end{cases}$$

$p_A(x)$ polinomio caratteristico della matrice A,

$$p_A(x) = \det(A - xI) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{\mathrm{Tr} A}_{\substack{\text{somma degli} \\ \text{autovalori} \\ \text{(con molt. algebrica)}}} x^{n-1} + \ldots + \underbrace{\det A}_{\substack{\text{prodotto autovalori} \\ \text{(con molt. algebrica)}}}$$

$$p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) =$$

$\binom{4}{2}$ termini

$$= x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - (abc+abd+acd+$$
$$+bcd)x + abcd$$

"Rational root theorem"

Dato un polinomio $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ← coeff. interi

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, se r/s è una radice razionale di $p(x)$, [cioè $p(r/s) = 0$], con r, s primi fra loro, allora

$\boxed{r \mid a_0}$ e $\boxed{s \mid a_n}$

Dim: $0 = s^n p\left(\frac{r}{s}\right) = \left(a_0 + a_1 \frac{r}{s} + a_2 \frac{r^2}{s^2} + \dots + a_n \frac{r^n}{s^n}\right) s^n =$

$= a_0 s^n + a_1 r s^{n-1} + a_2 r^2 s^{n-2} + \dots + a_k r^k s^{n-k} + \dots + a_n r^n$

Tutti i termini tranne il primo sono multipli di r, quindi deve esserlo anche il primo: $a_0 s^n = -a_1 r s^{n-1} - a_2 r^2 s^{n-2} \dots - a_n r^n = r \underbrace{\left(-a_1 s^{n-1} - a_2 r s^{n-2} \dots - a_n r^{n-1}\right)}_{\text{intero}}$

Ma r e s sono primi fra loro, quindi tutti i fattori di r devono stare in a_0. Questo ci dice che $r \mid a_0$.

La seconda metà è analoga, tutti i termini tranne l'ultimo sono multipli di 5 ... $\square$

$$2x^3 - 3972x^2 + 571852x + 3$$

Per sapere se ha radici razionali, mi basta provare pochi valori:

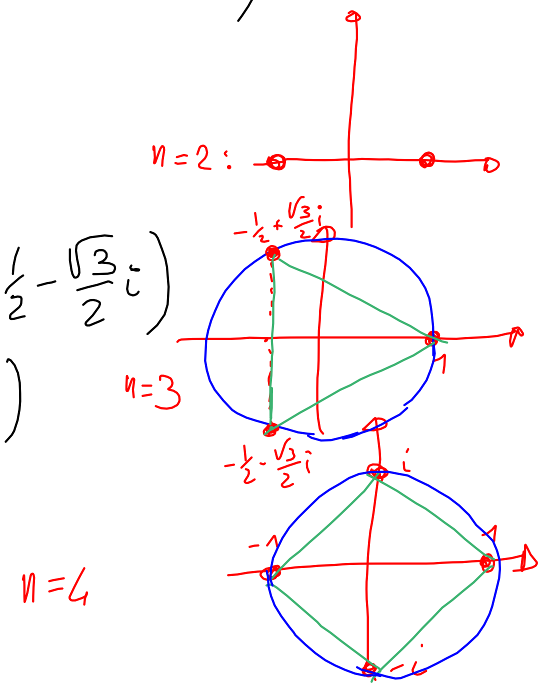
numeratori possibili: 1, 3 denominatori possibili: 1, 2

Rodici razionali possibili: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, -3, -\frac{3}{2}$

non ci dice nulla su quelle irrazionali, o complesse $\square$

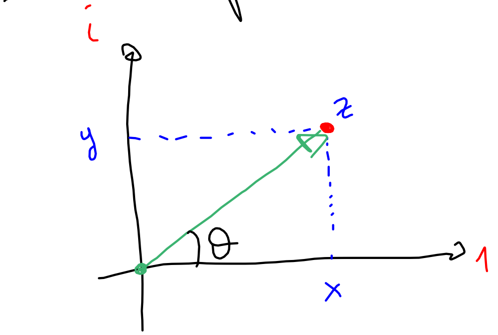
Radici del polinomio $x^n - 1$ (per un certo $n \in \mathbb{N}$)

- 1 è sempre una radice
- $n=2$ $\quad x^2-1$, radici ± 1
- $n=3$ $\quad x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) = (x-1)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
- $n=4$ $\quad x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x+i)(x-i)$



Per ogni n, le soluzioni di $x^n - 1 = 0$ formano i vertici di un n-agono regolare inscritto nella circonferenza unitaria

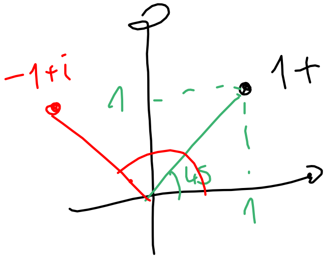
Forma polare di un numero complesso:



$z = x + iy$

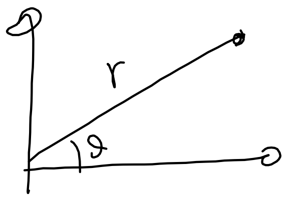
Per specificare z, posso dare:

- distanza dall'origine $\sqrt{x^2+y^2}$
- angolo ϑ tra z e l'asse delle x



$1+i$ è quel numero con distanza $= \sqrt{2}$
e angolo $= \frac{\pi}{4}$

$-1+i$ è quello con distanza $= \sqrt{2}$
angolo $= \frac{3}{4}\pi$



$x = r\cos\vartheta$
$y = r\sin\vartheta$

quindi $z = r\cos\vartheta + i r\sin\vartheta =$
$= r(\underline{\cos\vartheta + i\sin\vartheta})$
$= r e^{i\vartheta}$!!

Perché si scrive $e^{i\vartheta}=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$?

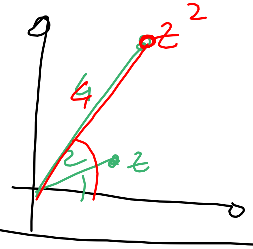
se ho $z_1=r_1(\cos\vartheta_1+i\sin\vartheta_1)=r_1e^{i\vartheta_1}$

$z_2=r_2(\cos\vartheta_2+i\sin\vartheta_2)=r_2e^{i\vartheta_2}$

Allora, $z_1z_2=(r_1r_2)e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}=r_1r_2\left(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\right)$

In particolare, dato $z=re^{i\vartheta}$,

$$z^n=r^ne^{in\vartheta}=r^n\left(\cos(n\vartheta)+i\sin(n\vartheta)\right)$$

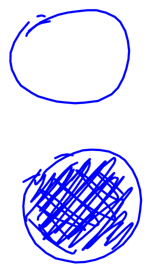


Stiamo cercando le soluzioni di $z^n-1=0$

cioè $z^n=1$ (radici n-esime dell'unità)

Devo avere $r^ne^{in\vartheta}=1\cdot e^{i\cdot 0}$

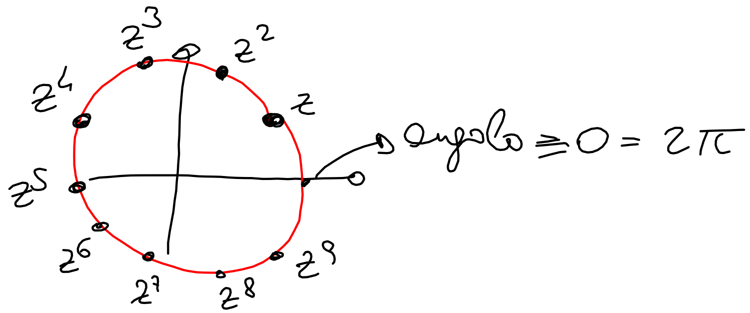
1 ha raggio = 1, angolo = 0



r è un numero reale positivo, quindi $r^n=1$ implica $r=1$

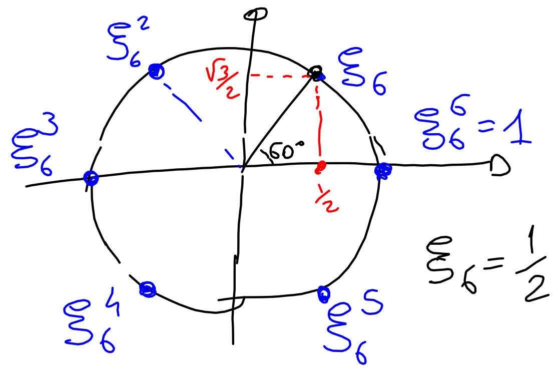
$\Rightarrow$ tutte le radici dell'unità stanno sulla circonferenza unitaria

Qual è l'angolo?



Se voglio tornare a angolo $=0$,
dev'essere un sottomultiplo di 2π

Cioè, una radice n-esima dell'unità è $\xi_n = 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)$



$n = 6$

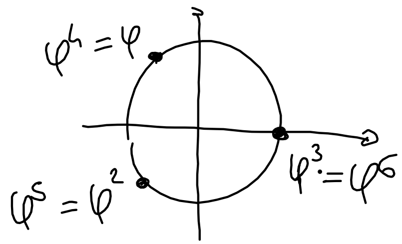
$\xi_6 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\xi_6^6 = 1$, quindi è soluzione di $z^6 - 1 = 0$

Chi sono gli altri zeri?

Sono $\xi_6^2, \xi_6^3, \xi_6^4, \xi_6^5, \xi_6^6 = 1$

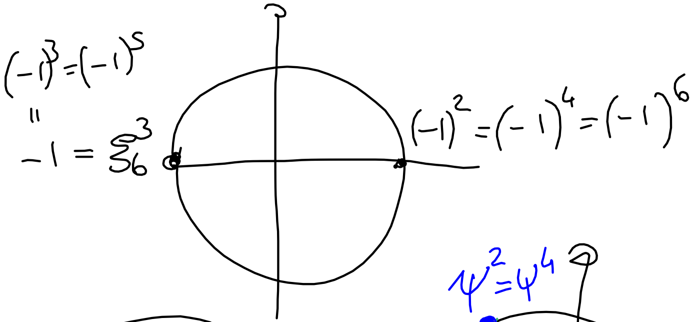
Perché? $\xi_6^2 = \varphi$



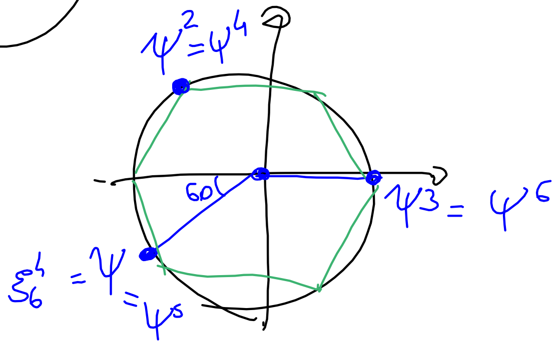
$\varphi = \xi_6^2$ fa due giri e termina in 1 anche lui

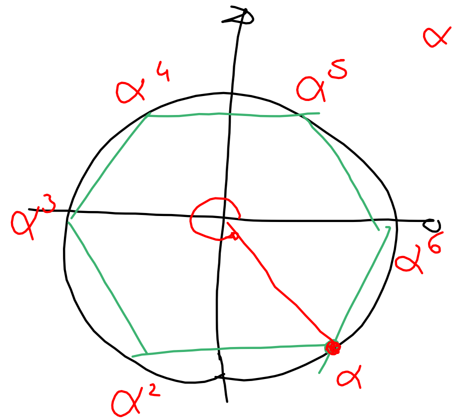
$$\varphi = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$\varphi^6 = \cos 6\cdot\frac{2}{3}\pi + i\sin 6\cdot\frac{2}{3}\pi = \cos 4\pi + i\sin 4\pi = 1 + i\cdot 0$$



$\boxed{\xi_6^4 =}\ \psi$





→ c'è una "radice elementare" $\xi_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

→ le altre radici sono le sue potenze

→ elevare potenze di ξ_n vuol dire "girare" sui vertici dell'n-agono regolare