ES: per quali $a \in \mathbb{R}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & -1 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile

$$p_A(x) = \det A - xI = \det \begin{bmatrix} 1-x & a \\ -a & -1-x \end{bmatrix} =$$

$$= (1-x)(-1-x) + a^2 = x^2 - 1 + a^2$$

$$p_A(x) = 0 \iff x^2 = 1 - a^2 \qquad x = \pm\sqrt{1-a^2}$$

- $a^2 < 1$: due autoval. reali distinti

$-1 < a < 1$
→ due autovettori
→ lin. ind. perché associati a autoval. diversi
→ diagonalizzabile

- $a^2 > 1$: due autovalori complessi

$a < -1$ o $a > 1$
se es. $a = 2$, $x = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\, i$
→ diagonalizzabile su $\mathbb{C}$
ma non su $\mathbb{R}$

Rimangono $a=1$, $a=-1$

0 radice doppia (in entrambi i casi)

$\to$ non si sa se è diagonalizzabile a priori, vediamo

$\boxed{a=1}$ $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

- singolare, quindi $\lambda_1=0$
- traccia $0=\lambda_1+\lambda_2$, quindi anche $\lambda_2=0$

Autovettori:

$$\operatorname{Ker} A-0\cdot I = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{autovettore}}\right\}$$

$\to$ non diagonalizzabile

$\boxed{a=-1}$

$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ due autoval. 0

$$\operatorname{Ker} A-0\cdot I = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\to$ non diagonalizzabile

Per quali a ho un autovalore $\frac{1}{2}$?

Autovalore $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\det A - \frac{1}{2}I = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2} & a \\ -a & -1-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ singolare}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + a^2 = 0 \qquad a^2 = \frac{3}{4} \qquad a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quando A ha autovettore $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$?

$Av = \lambda v$, ma non conosciamo λ

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2+a \\ -2a-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -a + 2\lambda = 2 \\ -2a - \lambda = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & +2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \end{array}\right]$$

$$-5\lambda = -3$$

$$a = 2\lambda - 2 = \frac{6}{5} - 2 = \boxed{-\frac{4}{5}} \leftarrow \lambda = \boxed{\frac{3}{5}}$$

Controlliamo ...

$$\begin{bmatrix} 1 & -4/5 \\ 4/5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-4/5 \\ 8/5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ok!

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - xI) = \det\begin{bmatrix} \frac{8}{10}-x & 3/10 \\ 2/10 & 7/10-x \end{bmatrix} = \left(\frac{8}{10}-x\right)\left(\frac{7}{10}-x\right) - \frac{6}{100} =$$

$$= \frac{56}{100} - \frac{7}{10}x - \frac{8}{10}x + x^2 - \frac{6}{100} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + x^2$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + x^2 = 0 \iff 1 - 3x + 2x^2 = 0$$

possibili sol. razionali: $\pm 1, \ \pm 1/2$

→ 1 è soluzione

→ $\frac{1}{2}$ è soluzione

prodotto $\frac{1}{2}$

somma $= 3/2$

Autovalori di A: 1, 1/2

Autovettori: 1) $\operatorname{Ker} A - I = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda_1 = 1 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = 0$

$-ab + ab = 0$

2) $\operatorname{Ker} A - \frac{1}{2}I = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}I =$

$= \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad A = VDV^{-1} \qquad V^{-1}AV = D$

(ho scritto $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 \\ 0.2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.3 & 1 \\ 0.2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$)

$A^k v = (VDV^{-1})^k v$

Mnemonica per ricordare $V^{-1}AV=D$

$V=[v_1\ v_2 \dots v_n]$

$AV=[\lambda_1 v_1\ \lambda_2 v_2 \dots \lambda_n v_n]=V\cdot D$

$[v_1\ v_2 \dots v_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n\end{bmatrix}$

$AV=VD$ versione "che si vede"

$V^{-1}AV=V^{-1}VD=D$

$A=AVV^{-1}=VDV^{-1}$

$$A^K v=(VDV^{-1})^K v=\underbrace{VD\cancel{V^{-1}}\,\cancel{V}D\cancel{V^{-1}}\,\cancel{V}D\cancel{V^{-1}}\cdots\cancel{V}DV^{-1}}_{K\text{ volte}}v=$$

$$=VD^KV^{-1}v$$

Altra strada... Scrivo $v=av_1+bv_2$

$$\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}0.3\\0.2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.6\\0.4\end{bmatrix}-0.1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/10 & 1\\2/10 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\left[\begin{array}{cc:c} 3/10 & 1 & 1/2 \\ 2/10 & -1 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{} \begin{array}{c} \\ b-\frac{2}{3}a \end{array}\left[\begin{array}{cc:c} 3/10 & 1 & 1/2 \\ 0 & -5/3 & \frac{1}{2}-\frac{1}{3} \end{array}\right] \to \begin{array}{c} (c) \\ (d) \end{array}\left[\begin{array}{cc:c} 3/10 & 1 & 1/2 \\ 0 & -5/3 & 1/6 \end{array}\right] \to$$

$$1-\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5} \qquad \frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$

$$\begin{array}{c} (c)+\frac{3}{5}(d) \\ (d) \end{array}\left[\begin{array}{cc:c} 3/10 & 0 & 6/10 \\ 0 & -5/3 & 1/6 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & \frac{6/10}{3/10} \\ 0 & 1 & \frac{1/6}{-5/3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/10 \end{array}\right]$$

$$2\underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}}_{v_1} - \frac{1}{10}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_2} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$v = 2v_1 - \frac{1}{10}v_2$$

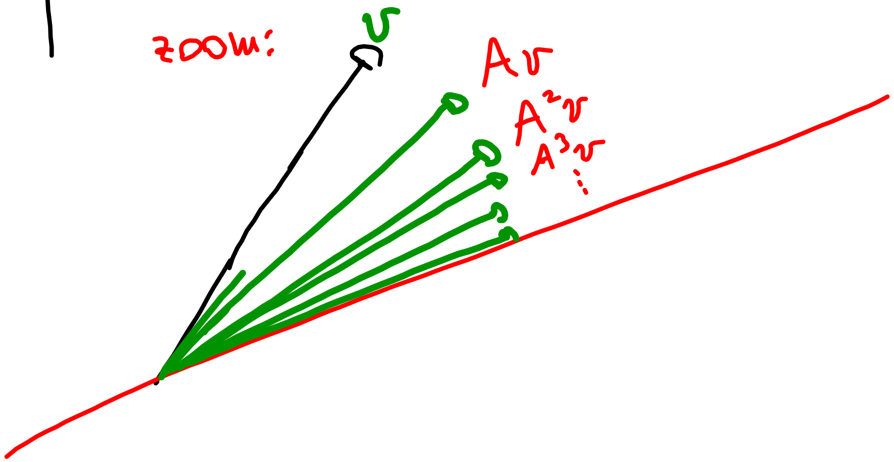
$$A^k v = 2A^k v_1 - \frac{1}{10}A^k v_2 = 2\lambda_1^k v_1 - \frac{1}{10}\lambda_2^k v_2 =$$

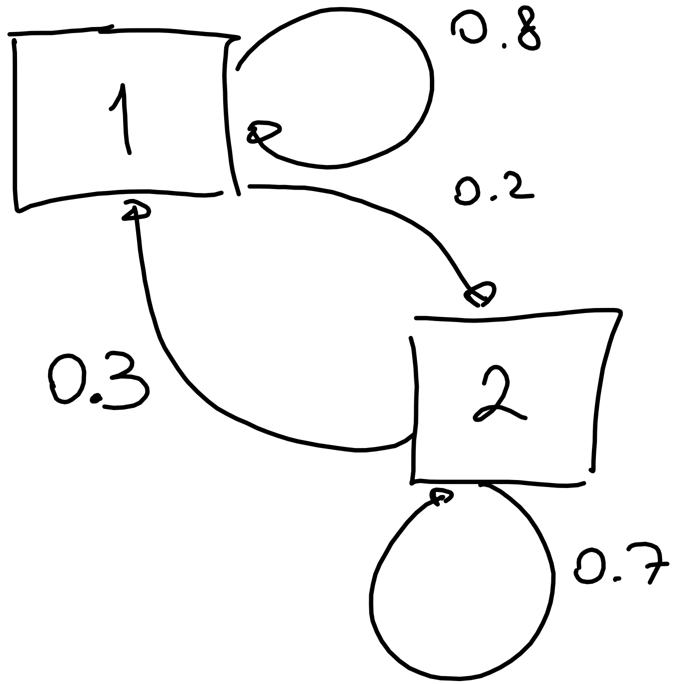
$$= 2\cdot 1^k v_1 - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k v_2 = 2v_1 - \frac{1}{10}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\to 0} v_2$$

$$\lim_{k\to\infty} A^k v = 2v_1$$

Iterando A, l'angolo "si stringe"
e converge a $2v_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

zoom:





Al tempo 0, $p[1] = \frac{1}{2}$

$p[2] = \frac{1}{2}$

rimango / c'ero già

Al tempo 1, $p[1] = 0.8 \cdot 0.5 +$

$+ 0.3 \cdot 0.5$

mi sposto / ero in 2

$p[2] = 0.7 \cdot 0.5 +$

$+ 0.2 \cdot 0.5$

probabilità al tempo 1 / probabilità al tempo 0

$$\begin{bmatrix} \; \\ \; \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

La probabilità di essere in uno stato o nell'altro tende a $\lim_{k \to \infty} A^k v$

"catene di Markov" Matrici di Markov

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0.8} & \boxed{0.3} \\ + & + \\ \boxed{0.2} & \boxed{0.7} \end{bmatrix}$$
$\quad =1 \qquad =1$

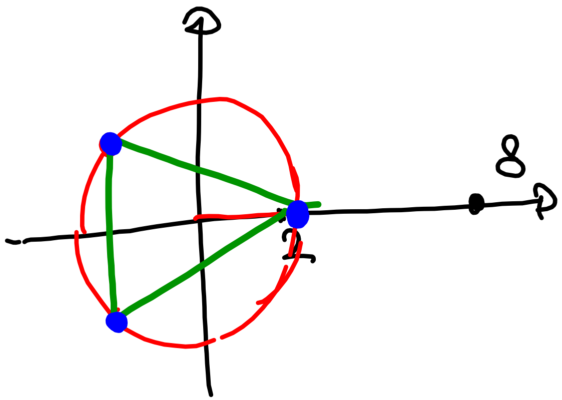
somma delle colonne $=1$
(e tutte le entrate positive)

$\Longleftrightarrow \quad [1 \quad 1] \cdot A = [1 \quad 1]$

$\Longleftrightarrow \quad A^T$ ha un autovettore $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 1$

mag 15-10:20

Radici di numeri complessi....



$a=8$ Soluzione di $\underline{z^3-a}=0$

$\Leftrightarrow$ radici cubiche di a

$z=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$

$z^3=\boxed{r^3}(\cos\boxed{3\vartheta}+i\sin\boxed{3\vartheta})$

deve essere uguale a $\boxed{8}\cdot(\cos\boxed{0}+i\sin\boxed{0})$

Quindi dev'essere $r^3=8$

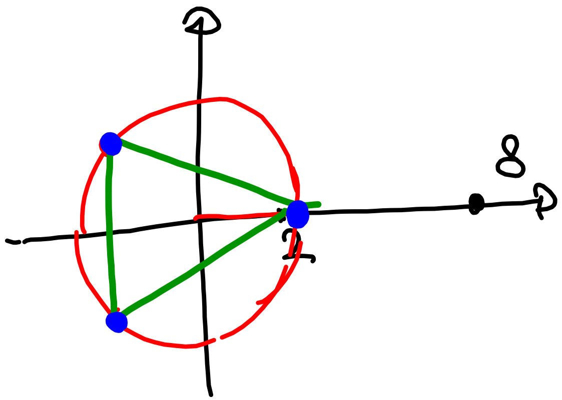
$3\vartheta=0 \pmod{2\pi}$

$r=\sqrt[3]{8}$

l'unica radice cubica reale positiva di $r>0$ (r è una distanza dell'origine)

$\vartheta\in\left\{\frac{0}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$

Radici di numeri complessi....



$a = 8$

Soluzione di $\underline{z^3 - a} = 0$

$\Leftrightarrow$ radici cubiche di a

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$z^3 = \boxed{r^3}(\cos\boxed{3\vartheta} + i\sin\boxed{3\vartheta})$$

deve essere uguale a $\boxed{8}\cdot(\cos\boxed{0} + i\sin\boxed{0})$

Quindi dev'essere $r^3 = 8$

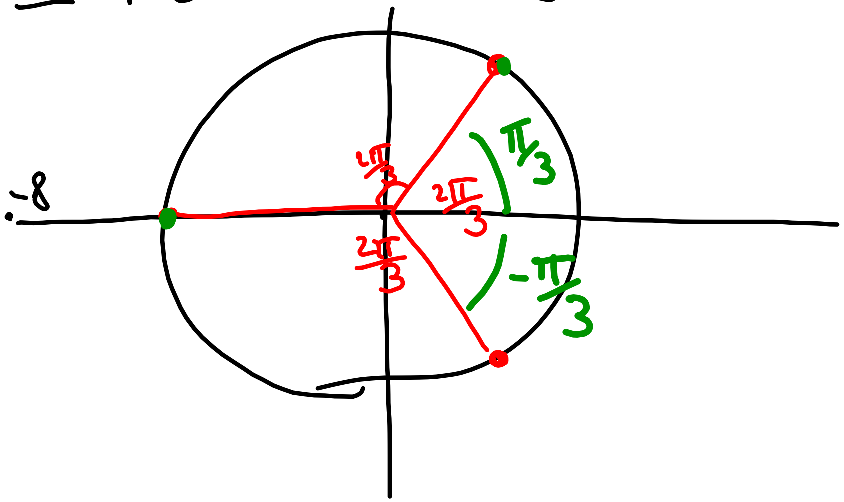
$$3\vartheta = 0 \pmod{2\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{8}$$

l'unica radice cubica reale positiva di $r > 0$ (r è una distanza dall'origine)

$$\vartheta \in \left\{\frac{0}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

ES Radici terze di -8 ?

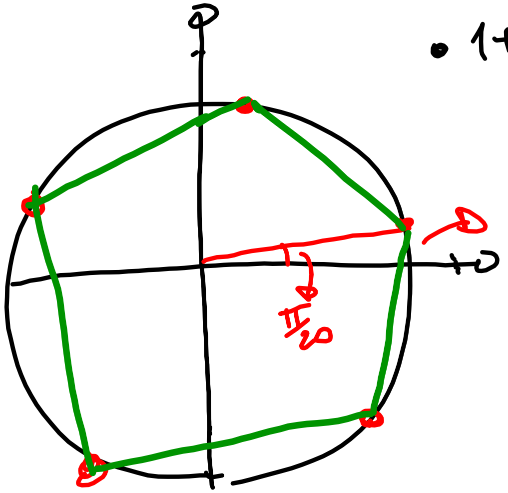


$$-8 = \underset{r^3}{8} \cdot \left(\cos \underset{3\vartheta}{\pi} + i \sin \pi\right)$$

$r = 2$

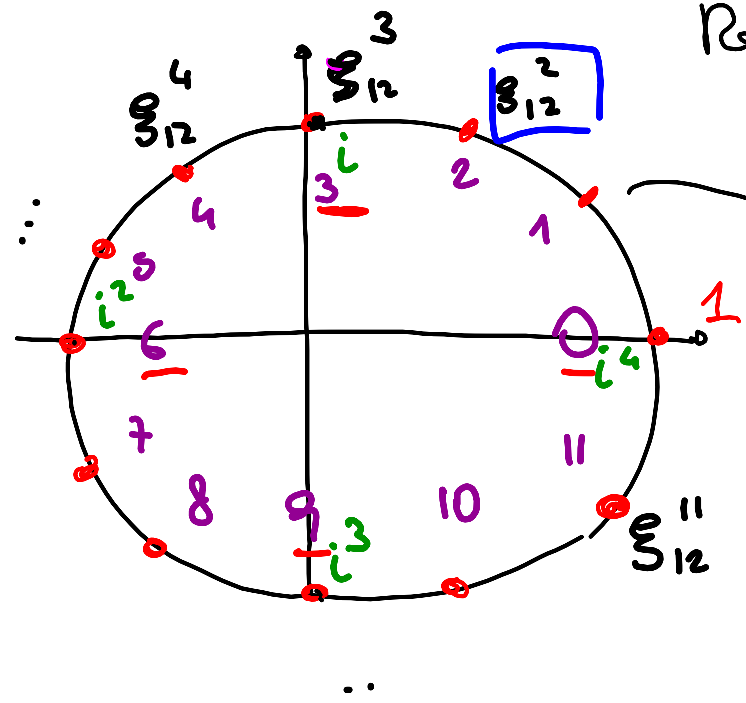
$$\vartheta = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi + 2\pi}{3}, \frac{\pi + 4\pi}{3} \right\}$$

Radici quinte di $1+i$



$\bullet\ 1+i$ $\qquad 1+i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$\rightarrow$ raggio $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$ angolo $\frac{\frac{\pi}{4}}{5} + \frac{2\pi}{5} k$



Radici 12-esime di 1:

$$\xi_{12} = \cos\frac{2\pi}{12} + i\sin\frac{2\pi}{12}$$

12 è la prima potenza per cui $\xi_{12}^k = 1$

Se invece prendo $i = \xi_{12}^3$, allora le sue potenze sono

Cosa succede?

ξ_{12}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
ξ_{12}^2	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10	0
ξ_{12}^3	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9	0

mag 15-10:41

Insomma, stiamo facendo i multipli di
1, 2, 3, .. 11 modulo 12