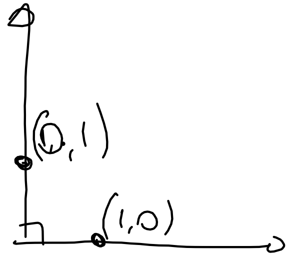
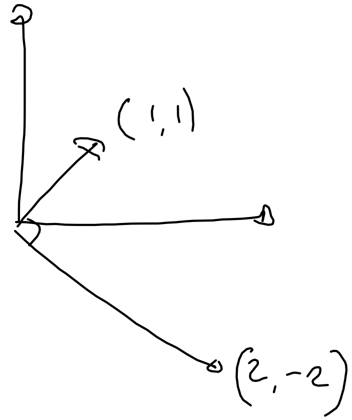
# Ortogonalità



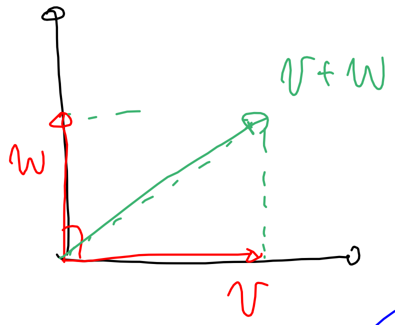

Due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n$) (non si usano spesso con campi finiti)

si dicono **ortogonali** se $v^T w = 0$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \qquad 0 = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$$

Lunghezza (euclidea) di un vettore: $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = (v^T v)^{1/2} = \|v\|$

Teorema di Pitagora: $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ se $v, w$ sono ortogonali




$$\|v+w\|^2 = (v+w)^T(v+w) = v^Tv + \underbrace{v^Tw}_{=0} + \underbrace{w^Tv}_{=0} + w^Tw =$$

perché è $(w^Tv)^T = v^Tw = 0$, quindi $w^Tv = 0$

$$= \|v\|^2 + \|w\|^2$$

Osservazione: tutto questo, con "trasposto", funzione bene in $\mathbb{R}$

Quando il campo è $\mathbb{C}$, non possiamo definire lunghezza come

$\|v\| = (v^Tv)^{1/2}$ $\qquad \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\|^2 \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 1 + i^2 = 0$ ??

Modo giusto di procedere: rimpiazziamo $v^T$ con $\bar{v}^T$

Def: $v^H := \bar{v}^T$

$v^*$

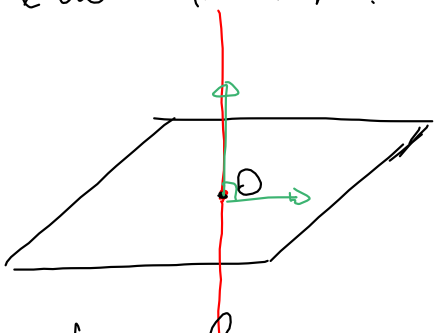
$v^\dagger$

Se $v = \begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$ $\quad v^H v = \begin{bmatrix}1 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} = 1 - i^2 = 2 \quad \|v\| = \sqrt{2}$

Per ogni numero complesso $z = \underset{\text{reale}}{x} + i\underset{\text{reale}}{y}$, $\quad \bar{z}z = (x-iy)(x+iy) = \underbrace{x^2+y^2}_{\substack{= \\ r^2 \text{ in coord. polari}}} \geq 0$

Due sottospazi si dicono ortogonali se sono fatti tutti di vettori ortogonali l'uno all'altro.

Es: in $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ e $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ sono ortogonali




Def: Dato $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio, i vettori $\{w : v^T w \text{ per ogni } v \in V\}$ formano un sottospazio, si chiama $V^\perp$ $\qquad v \perp w$

Es: se $V = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, i vettori ortogonali a ogni $v \in V$ sono

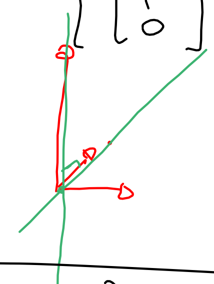
$$\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\} = V^\perp$$

Dim che $V^\perp$ è un sottospazio: 1) se $w_1 \in V^\perp$, $w_2 \in V^\perp$, allora per ogni $v \in V$ si ha

$$(w_1 + w_2)^T v = \underbrace{w_1^T v}_{=0 \text{ perché } w_1 \in V^\perp} + \underbrace{w_2^T v}_{=0 \text{ perché } w_2 \in V^\perp} = 0$$

2) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, se $w_1 \in V^\perp$, allora per ogni $v \in V$ si ha $(\lambda w_1)^T v = \lambda (w_1^T v) = \lambda \cdot 0 = 0$.

Gli spazi $V = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ e $W = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ sono ortogonali, ma $W$ non è tutto $V^\perp$, è più piccolo.



Se $V = \left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, allora $V^\perp = \mathbb{R}^3$ (per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}^T v = 0$)

Dato $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio di dimensione $k$, $V^\perp$ ha dimensione $n-k$.

Dim: sia $v_1, v_2, \dots, v_k$ una base di $V$.

Un vettore $w$ sta in $V^\perp$ se $v_1^T w = v_2^T w = v_3^T w = \dots = 0$

(perché? Per ogni $v \in V$, $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k$ e quindi

$$v^T w = (x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k)^T w = x_1 v_1^T w + x_2 v_2^T w + \dots + x_k v_k^T w = 0 )$$

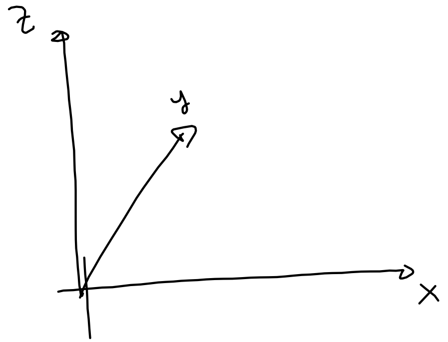
Quindi, $w \in V^\perp$ se e solo se $w \in \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} v_1^T \\ \hline v_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline v_k^T \end{bmatrix}$

$$V^\perp = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{bmatrix}$$

perché $\mathrm{rk}\,A = \mathrm{rk}\,A^T$ per ogni $A$

$$\dim V^\perp = n - \mathrm{rk}\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_k^T \end{bmatrix} = n - \mathrm{rk}\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix} = n - k$$

perché $[v_1\ v_2 \dots v_k]$ è una base di $V$ con dim. $k$




Vettori ortogonali al piano span $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$ dim $= 2$

sono span $\left\{ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$ dim $= 1$

Data una matrice $A$, so costruire im $A$, spazio delle colonne

Ker $A$, vettori tali che $Ax=0$

im $A^T$, spazio delle righe

Se $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$, allora

$\operatorname{Im} A \subseteq \mathbb{R}^m$

$\operatorname{Ker} A \subseteq \mathbb{R}^n$

$\operatorname{Im} A^T \subseteq \mathbb{R}^n$

Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$

Teo: lo spazio delle righe $\operatorname{Im} A^T$ e $\operatorname{Ker} A$ sono ortogonali

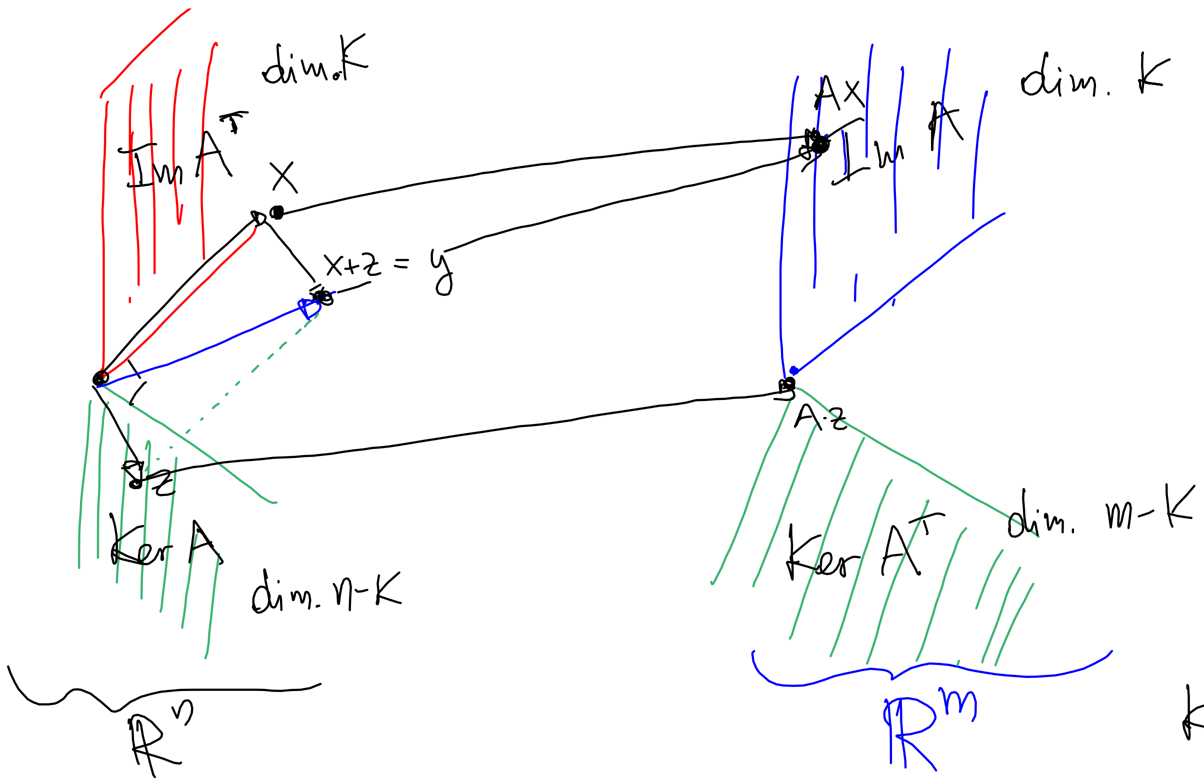
Dim: Prendiamo $x \in \operatorname{Ker} A$, cosicché $Ax=0$

Prendo $y \in \operatorname{Im} A^T$; $y^T$ si scrive come comb. lineare delle righe di $A$

$$y^T = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m,$$ dove $w_i$ sono le righe di $A$, $A = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$.

$$y^T = \alpha^T A$$ dove $\alpha^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_m]$.

Allora, $$y^T x = (\alpha^T A) x = \alpha^T (A x) = \alpha^T 0 = 0$$




"Kernel sinistro"

Ker $A^T$ = vettori $y$ t.c. $A^T y = 0$ $\Updownarrow$ $y^T A = 0$

Se $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ con $rk\, A = k$ = numero pivot

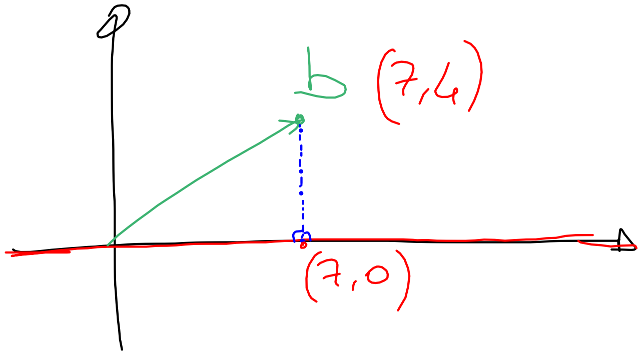
Una volta che ho dimostrato $\dim \operatorname{Im} A^T + \dim \operatorname{Ker} A = n$, se $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$

applico il risultato ad $A^T$, e ottengo

$$\dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A^T = \underbrace{m}_{\substack{\text{numero di colonne}\\ \text{di } A^T}}$$

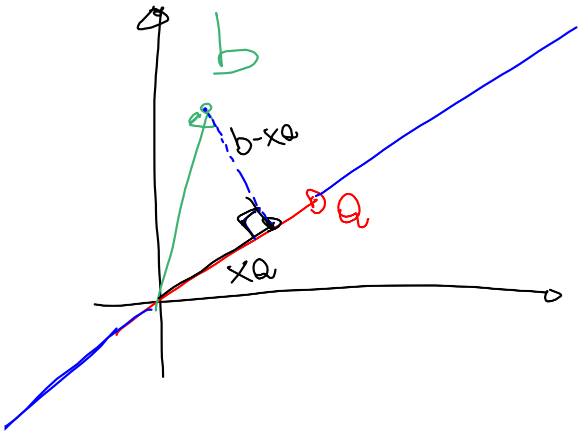
mag 19-15:07

# Proiezioni




Dato un punto b e un sottospazio V, qual è il punto di V più vicino a b?

Distanza minore possibile $\Longleftrightarrow$ perpendicolare




Il punto di $V = \text{span}\{a\}$ più vicino a b è quello tale che la differenza sia perpendicolare al vettore a.

Proiezione: x volte il vettore a, $xa$ per $x \in \mathbb{R}$

La differenza $b - xa$ dev'essere perpendicolare ad a

mag 19-15:09

Dev'essere $a^T(b - xa) = 0$ quindi $(a^Tb) = (a^Ta)x$ $\quad x = \dfrac{a^Tb}{a^Ta}$

Quindi il punto di span$\{a\}$ più vicino a $b$ è $\dfrac{a^Tb}{a^Ta}a$

Questa operazione si chiama <u>proiezione ortogonale</u> di $b$ su $a$

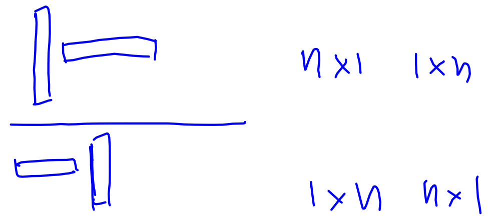
La quantità $\dfrac{a^Tb}{a^Ta}a$ non dipende da quale multiplo di $a$ prendo

Il denominatore $a^Ta$ è sempre $>0$ a meno che $a=0$

È un'operazione lineare: dati $b_1, b_2$ $\quad \dfrac{a^T(b_1+b_2)}{a^Ta}a =$

$$= \frac{a^Tb_1}{a^Ta}a + \frac{a^Tb_2}{a^Ta}a$$

La matrice relativa è $\dfrac{aa^T}{a^Ta}$




$$\frac{a\,a^T b}{a^Ta}$$

numero

numero

$$A = \frac{aa^T}{a^Ta}$$

Notate che $A = A^2 = A^3 = A^4 = \dots$

(algebricamente: $A^2 = \dfrac{\cancel{a} \overbrace{a^T \cdot a}^{\text{numero}} a^T}{\underbrace{\cancel{a^T a}\; a^T a}_{\text{numeri}}} = \dfrac{a a^T}{a^T a} = A$)

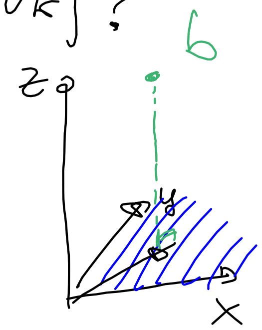
$Aa = a$ ($a$ è autovettore di $A$ con autovalore 1)

Se $v \in (\underbrace{\text{span}\{a\})^\perp}_{\text{dimensione } n-1}$, allora $Av = 0$ ($v$ autovettore con autoval. 0)

(A diagonalizzabile, forma diagonale è $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$)

mag 19-15:29

Cosa cambia se proietto su $V = \text{span}\{v_1, v_2, \dots v_k\}$?



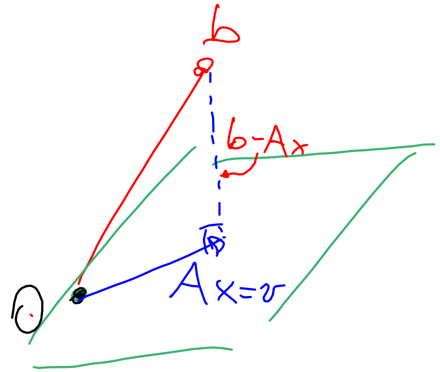

Suppongo $v_1, v_2, \dots v_k$ base di $V$

Cerco un vettore in $V$, $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k$

$$v = A x$$

matrice che ha i $v_i$ come colonne

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$




La condizione è di nuovo ortogonalità:

$$v_1^T(b-Ax)=0$$
$$v_2^T(b-Ax)=0$$
$$\vdots$$
$$v_k^T(b-Ax)=0$$

$$\iff A^T(b-Ax)=0$$

Di nuovo, $A^T(b-Ax)=0$ $\qquad A^TAx=A^Tb$

$$x=(A^TA)^{-1}A^Tb$$

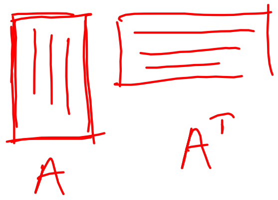
Quindi la proiezione $v=Ax=\underbrace{A(A^TA)^{-1}A^T}b$

Formula per la proiezione di $b$ su Im $A$

Matrice di proiezione: $A(A^TA)^{-1}A^T=P$

Potrebbe venirvi voglia di usare $(A^TA)^{-1} \cancel{=} A^{-1}(A^T)^{-1}$

non funziona, perché $A$ non è quadrata




Potete controllare che $P^2=P$: $P^2=A(A^TA)^{-1}\cancel{\boxed{A^TA}(A^TA)^{-1}}A^T=P$

Ultimo dettaglio... perché $A^TA$ è invertibile?

Teo: sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ tale che le colonne di $A$ sono linearmente indipendenti ($rk\, A = n$). Allora, $A^TA \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ è invertibile.

Dim: Supponiamo che esista $\boxed{v \neq 0}$ $A^TAv = 0$

Allora, $v^TA^TAv = 0$

$$v^TA^TAv = (Av)^T(Av)$$

Questo vuol dire che $\|Av\|^2 = 0$. Ma allora $Av = 0$

$w = Av \qquad w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_m^2 = 0 \iff w_i = 0$ per ogni $i$

Visto che le colonne di $A$ sono lin. indipendenti

$Av = 0$ è possibile solo se $\boxed{v = 0}$ Assurdo..

($Av$ è una comb. lineare delle colonne di $A$ ...)

$\square$