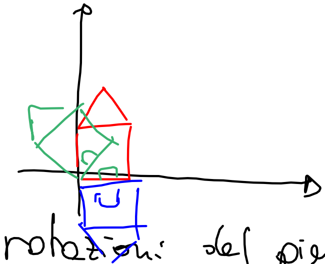
Matrici ortogonali

Sono quelle che $\|Qv\| = \|v\|$



→ rotazioni del piano
simmetrie

Sono tutte non singolari ($\ker Q = \{0\}$)

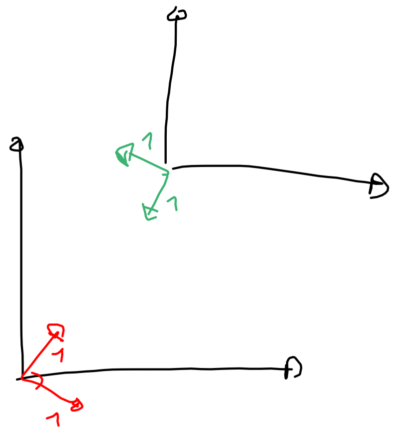
Perché? Se ho $v \neq 0$, $Qv = 0$, allora $\|Qv\| \neq \|v\|$

Quali sono più precisamente:

$$\|v\|^2 = v^T v = (Qv)^T Q v = v^T Q^T Q v$$

È vera per tutti i vettori v solo se $Q^T Q = I$

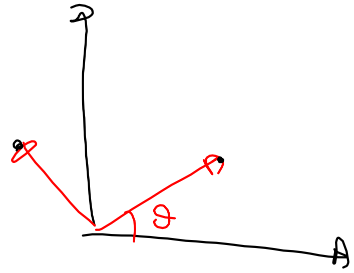
Una matrice si dice <u>ortogonale</u> se $Q^T Q = I$



- Le colonne sono vettori con lunghezza 1
- Le colonne sono ortogonali tra loro

Esempi di matrici ortogonali..

→ Rotazioni del piano

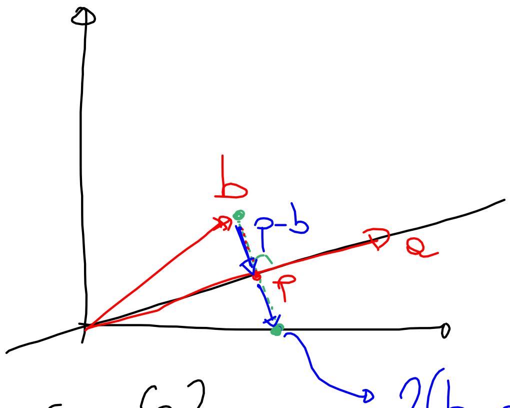


$$Q_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$Q_\vartheta^T Q_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ Matrici di permutazione $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad P^T P = I$

→ Simmetrie del piano



$$p = \frac{aa^T}{a^Ta} b$$

$$2(b-p)-b = b-2p$$

Simmetria rispetto alla retta span$\{a\}$

$$I - 2\frac{aa^T}{a^Ta}$$

Tutte queste erano ortogonali e quadrate

$Q^TQ = I$, allora Q^T è l'inversa di Q, $Q^{-1} = Q^T$

Più in generale, possono essere rettangolari

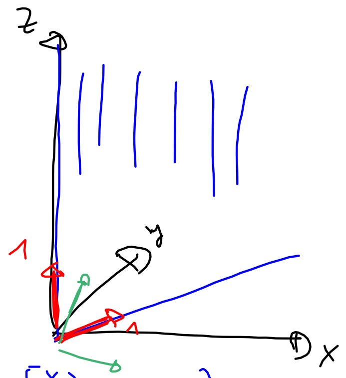
Queste basi preservano la lunghezza:

$$V = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k \quad (*)$$

se $(v_1, v_2, \dots v_k$ base ortogonale$)$

allora
$$\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \right\| = \|v\|$$

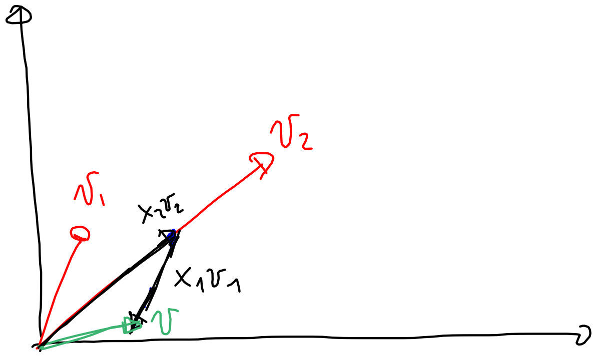
$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$$



$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x = y \right\}$

base ortogonale: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(Dim: facile: $v \overset{(*)}{=} Qx$ $\quad v^Tv = (Qx)^T Qx = x^T Q^T Q x = x^T x$



$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

In $\mathbb{R}^3$, $\quad V = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=v_1} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{=v_2}$$

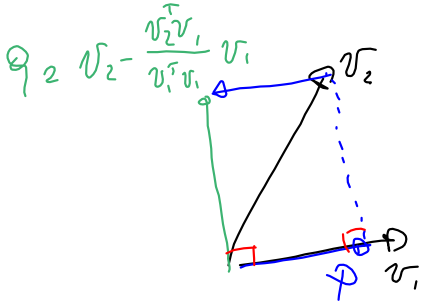
$$v_1^T v_2 \neq 0 \qquad v_1^T v_1 \neq 1 \qquad v_2^T v_2 \neq 1$$

Come faccio a trovare una base ortogonale per lo stesso sottospazio?

Metodo di Gram-Schmidt:

Per ottenere un vettore ortogonale a v_1, sottraggo a v_2 la sua proiezione su v_1:

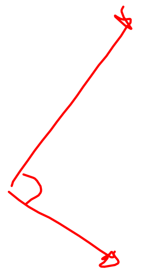
$$q_2 = v_2 - \frac{v_1^T v_2}{v_1^T v_1} \cdot v_1$$



$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = v_2 - \frac{v_1^T v_2}{v_1^T v_1} v_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$v_1^T q_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

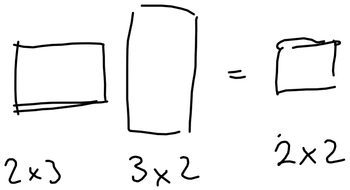


Per ottenere una base ortogonale, basta riscalarli (moltiplicare ognuno per una costante) in modo che la lunghezza diventi 1;

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

w_1, w_2 è una base ortogonale di V

$W = \left[w_1 \,\vdots\, w_2 \right]$ è una matrice tale che $W^T W = I_{2\times 2}$



Metodo di Gram-Schmidt

Se ho più vettori, stessa idea:

for $i = 2 \ldots k$

for $j = 1 \ldots i-1$

Rimpiazzo v_i con $v_i - \frac{v_j^T v_i}{v_j^T v_j} v_j$

end

end

$v_i^T v_j = v_j^T v_i$

$\hat{v}_j = \frac{v_j}{(v_j^T v_j)^{1/2}}$

Se $A = \left[v_1 \; v_2 \; \cdots \; v_k \right]$, $v_1, v_2, \ldots v_k$ base di un sottospazio V

Proiezione di b su V è $p_a(b) = A(A^T A)^{-1} A^T b$

Se la base v_i è ortogonale, $A^T A = I$, $p_a(b) = A A^T b$

base ortogonale:

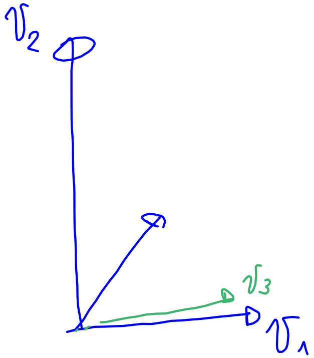
$v_i^T v_j = 0$ per $i \neq j$, lunghezze non per forza 1

matrice $Q = [v_1\ v_2 \cdots v_k]$

basi ortonormali

$$v_i^T v_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

⟷ matrice ortogonale, $Q^T Q = I$



$v_2^T v_1 = 0$

$v_3^T v_2 = 0$

$v_3^T v_1 \neq 0$

mag 21-11:57

Teorema (che non dimostriamo)

Una matrice simmetrica $A = A^T$, $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$

- ha tutti gli autovalori reali
- è sempre diagonalizzabile
- come base di autovettori, posso scegliere una matrice ortogonale

---

Es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = A^T \ \checkmark \qquad p_A = \det \begin{bmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{bmatrix} = 4-4x+x^2-1 = x^2-4x+3$$

Soluzioni: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ ← trovate sempre tutte le sol. reali

Autovettori: $\operatorname{Ker} A-\lambda_1 I = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} \right\}$

$\operatorname{Ker} A-\lambda_2 I = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_2} \right\}$

$Q = \left[v_1 \,\vdots\, v_2 \right]$ non è ortogonale

$$Q = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} v_1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} v_2\right]$$ è ortogonale:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \end{bmatrix}$$ è ortogonale

(osservazione: Q è la matrice che fa rotazione del piano di $45°$)

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi per una matrice simmetrica ho la fattorizzazione

$$A = QDQ^{-1} = QDQ^T$$

matrice diagonale con autovalori

matrice degli autovettori, che posso scegliere ortogonale

Se ho $A = QDQ^T$, con D diagonale e Q ortogonale, allora vale sempre che $A = A^T$

$$(QDQ^T)^T = (Q^T)^T D^T Q^T = QDQ^T$$

Matrici positive definite:

Def: una matrice è positiva definita se è simmetrica e ha tutti gli autovalori positivi

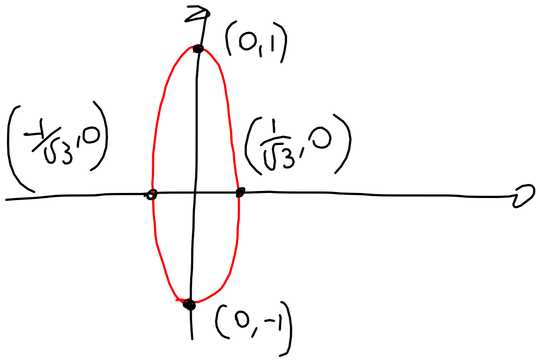
---

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad x^2 + y^2 = \text{lunghezza di } v \text{ al quadrato}$$

Posso fare una "variante" in cui le quantità sull'asse x sono più importanti, per es. $3x^2 + y^2$

mag 21-12:23

Quali sono i vettori che hanno "peso" 1? $3x^2+y^2=1$



Posso vedere una matrice definita positiva A come una misura di "lunghezza pesata" con pesi diversi e direzioni diverse secondo la regola lunghezza_pesata$(v) = v^TAv$

Caso più facile: $A = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$$l.p.(v) = v^TAv = \begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = 3x^2+y^2$$

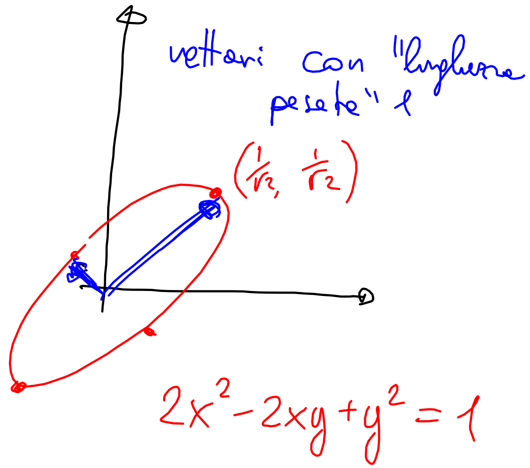
Caso più difficile: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$l.p.(v) = [x \;\; y] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

(in generale $[x \;\; y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 - 2bxy + cy^2$)

A cosa corrisponde questa "lunghezza pesata"?

A pesi diversi lungo assi diversi:



$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{Q^T}$$

$$l.p.(v) = v^T A v = \underbrace{v^T Q}_{x^T} D \underbrace{Q^T v}_{x} = x^T D x$$

x è il vettore che dà le componenti di v nella base Q

Ogni matrice simmetrica con autovalori positivi definisce una "lunghezza pesata" $l(v) = v^T A v$ dove le componenti lungo autovettori diversi sono pesati diversamente.

$$A = QDQ^T \qquad l.p.(v) = v^T A v = v^T Q D Q^T v = x^T D x$$

dove $x = Q^T v$

$$l.p.(v) = x^T D x = [x_1 \; x_2 \cdots x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

Perché ho chiesto $\lambda_i > 0$? Perché altrimenti $l.p.(v)$ può assumere valori negativi.