Un esempio di simulazione

Simulazione & Logistica, I modulo
Esercitazione n. 1

Corso di Laurea in Informatica Applicata
Università di Pisa, sede di La Spezia
A.a. 2008/09, I semestre

Contenuti

- Lo studio di una popolazione
- Modello concettuale
- Modello di simulazione
- Caratteristiche del modello
- Implementazione della simulazione
- Analisi dei dati

Studio di una popolazione

- Logistic map: un esempio interessante
  - È un caso di studio di biologia (Robert May, 1976)
  - Deriva da un modello demografico (Pierre F. Verhulst, 1838)
  - È un esempio ricco di comportamenti diversi
  - Studiabile solamente con l'esecuzione del modello
- Modello concettuale
  - Le risorse di un ecosistema determinano una capacità, fissa, di sostentamento di una popolazione
  - La popolazione cresce in proporzione al numero di individui (+ individui + nascite)
  - La popolazione decresce in proporzione inversa alla disponibilità di risorse (– risorse + morti di inedia)

Logistic map: modello

- Popolazione in funzione della generazione precedente
- Parametri, notazioni e convenzioni
  - Popolazione rispetto alla capacità dell'ecosistema, 1 corrisponde alla massima popolazione sostenibile
  - Tasso di crescita, fertilità della specie: costante (α)
  - Tasso di decrescita, mortalità della specie: funzione della disponibilità di risorse, distanza dalla massima popolazione disponibile
- Formula della popolazione

$$x_{n+1} = f(x_n) = \alpha x_n (1 - x_n)$$

Altri modelli

- Modello di Ricker (W. Ricker, 1954)
  - Tasso di natalità (r) e capacità di sostentamento (k)

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n e^{r(1-\frac{x_n}{k})}$$

- Prede e predatori (A. Lotka e V. Volterra, 1925/26)
  - Nascite e morti, naturali o determinate dagli incontri
  - Equazione delle prede

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n) = \alpha x_n - \beta x_n y_n$$

  - Equazione dei predatori

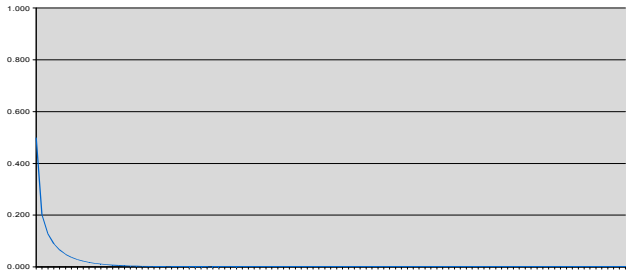
$$y_{n+1} = g(x_n, y_n) = \gamma x_n y_n - \delta y_n$$

Logistic map: studio

- Modello
  - Dinamico
  - Deterministico
  - Continuo (discretizzato)
  - Chiuso
- Realizzazione del simulatore
  - Con un foglio di calcolo
  - Parametri α e x_0
- Comportamenti osservabili
  - Estinzione
  - Convergenza, monotona o dopo alcune oscillazioni
  - Oscillazioni periodiche, divergenze e comportamenti caotici

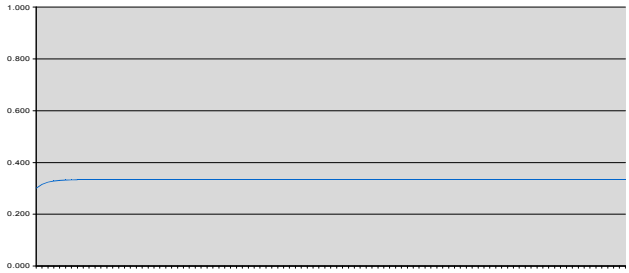
Estinzione

- Fertilità in (0 .. 1]: la popolazione si estingue
  - $\alpha = 0.80$, $x_0 = 0.50$



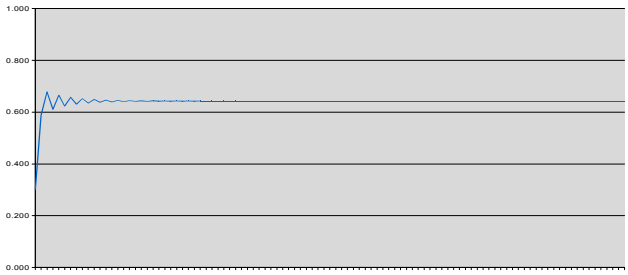
Convergenza - 1

- Fertilità in (1 .. 2]: la popolazione converge
  - $\alpha = 1.50$, $x_0 = 0.30$, $y = (\alpha - 1)/\alpha$



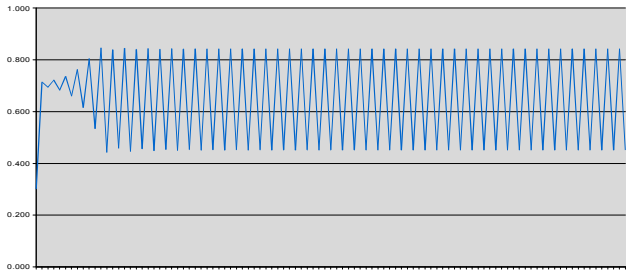
Convergenza - 2

- Fertilità in (2 .. 3]: la popolazione oscilla, poi converge
  - $\alpha = 2.80$, $x_0 = 0.30$, $y = (\alpha - 1)/\alpha$



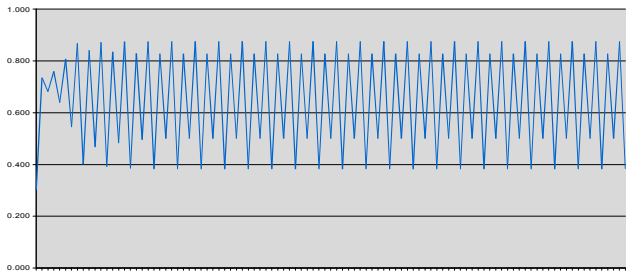
Oscillazione - 1

- Fertilità in (3 .. 3.45): pop. oscilla fra 2 valori
  - $\alpha = 3.40, \ x_0 = 0.30$



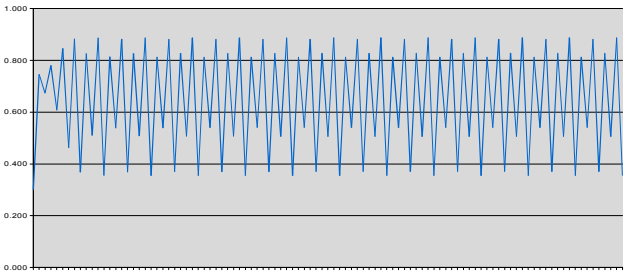
Oscillazione - 2

- Fertilità in (3.45 .. 3.54): pop. oscilla fra 4 valori
  - $\alpha = 3.50, \ x_0 = 0.30$



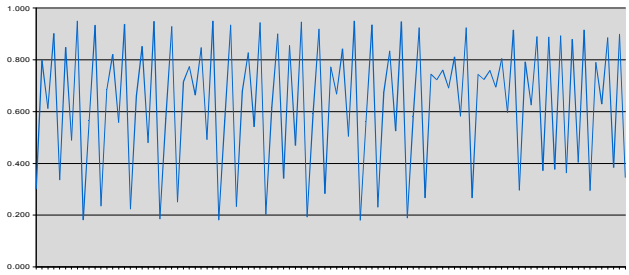
Oscillazione - 3

- Fertilità in (.. 3.55 ..): oscilla fra 8 valori (poi 16, 32, ...)
  - $\alpha = 3.55, \ x_0 = 0.30$



Caos

- Fertilità in (3.57 ..4]: nessun periodo
  - $\alpha = 3.80, \; x_0 = 0.30$



Altre note

- I comportamenti per $\alpha \leq 4$ sono indipendenti da x_0
- Ci sono isole di stabilità per valori di α in (3.57 .. 4)
- Nelle isole di stabilità si trovano oscillazioni per tutti i periodi (3, 6, 12, ...; 5, 10, 20, ...)
- Per $\alpha > 4$ diverge ($x > 1$) e poi si estingue ...
  ... ma non per tutti gli x_0