

Sim
UniPisa
LaSpezia

Analisi e valutazione dei risultati delle simulazioni


Simulazione – Lezione n. 11
Corso di Laurea in Informatica Applicata
Università di Pisa, sede di La Spezia

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – www.di.unipi.it/~giovanni 1/16 

Sim
UniPisa
LaSpezia

Contenuti


- Risultati di un progetto di simulazione
- Esecuzioni indipendenti
- Valutazione dei risultati
- Analisi del transitorio
- Varianza dei risultati

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – www.di.unipi.it/~giovanni 2/16 

Sim
UniPisa
LaSpezia

Obiettivo di una simulazione

- Comportamento di un sistema
 - Dipende dal modello
 - Dipende dai parametri del sistema/modello
 - Dipende dai valori delle variabili casuali del sistema
 - È descritto dai dati in uscita
 - Risultato “grezzo” della simulazione
- Dopo aver prodotto buoni modelli e simulatori ...
- ... produrre buoni dati e analizzarli
 - Generarli in modo controllato
 - Interpretarli correttamente, dichiarandone i limiti
 - Rispetto agli obiettivi della simulazione

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – www.di.unipi.it/~giovanni 3/16 

Formulazione in termini di VC

- I dati in uscita sono variabili casuali
 - Perché parte dei dati “in ingresso” sono variabili casuali
 - Perché il comportamento, è deterministico, ma complesso
- Problema
 - Un valore di una VC è un caso, non è significativo
 - Occorre studiare sui grandi numeri, quindi molti valori
- Però usiamo strumenti già noti
 - Identificazione delle VC, dagli obiettivi della simulazione
 - Analisi, per la stima dei valori caratteristici
 - Media (valore atteso!), varianza, moda ...
 - Intervalli di confidenza, per l'affidabilità delle stime

Valori prodotti da una simulazione

- Esempio
 - Supponiamo di voler studiare la coda di un servizio
 - La lunghezza della coda è la VC che ci interessa
- Dati risultanti da una simulazione
 - La lunghezza finale della coda (e.g. dei clienti allo sportello)
 - La lunghezza rilevata a tempi fissati, variamente stabiliti
 - Per es.: 0, 1, 1, 2, 3, 2, 2, 0, 1, 0, 2, 3, 1, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 1
 - Il primo è un valore solo
 - Del secondo insieme, posso fare la media campionaria?
 - La posso usare come stimatore?
 - Di cosa?


Dipendenza dei valori

- Una simulazione, un valore
 - I valori di una VC di una simulazione sono indipendenti?
 - Spesso dipendono dai valori precedenti
 - Lunghezza della coda: a t_i “pesa” sulla lunghezza a t_{i+1}
 - Il tempo di ozio: cresce sempre, correlazione con t evidente
- Sono equivalenti (già noto)
 - n valori di una VC X con distribuzione F_X
 - i valori di n VC X_1, \dots, X_n , con distribuzione F_X e indipendenti
- Quindi, dovendo studiare il valore di X
 - Non potendo usare n valori di X di una simulazione, ...
 - ... si usano i valori di n VC date da simulazioni indipendenti

Sim
UniPisa
LaSpezia

Esecuzioni indipendenti


- Eseguire n simulazioni
 - A ogni simulazione cambiare il seme dei generatori di base
 - Raccogliere valori della VC nel tempo (e.g. a intervalli fissi)
 - Per esempio, per la lunghezza delle code L :
 - Esecuzione 1: $L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1t}$
 - Esecuzione 2: $L_{21}, L_{22}, \dots, L_{2t}$
 - ...
 - Esecuzione n : $L_{n1}, L_{n2}, \dots, L_{nt}$
- Le VC sono indipendenti “sulle colonne”
 - Medie, varianze etc. del campione sono stimatori corretti
 - È importante come si registrano i dati (coerenza sui t)

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – www.di.unipi.it/~giovanni 7/16 

Sim
UniPisa
LaSpezia

Considerazioni su semi e periodi


- Dopo quando si ripetono i dati?
- Esempio, 2 VC e generatore di periodo 7
 - Generatore unico, inizializzato con seme v_1
 - VC₁: $v_1, v_3, v_5, v_7, v_2, v_4, v_6, v_1, \dots$
 - VC₂: $v_2, v_4, v_6, v_1, v_3, v_5, v_7, v_2, \dots$
 - Istanze diverse, stesso seme
 - VC₁: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1, \dots$
 - VC₂: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1, \dots$
 - Istanze diverse, semi diversi
 - VC₁: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1, \dots$
 - VC₂: $v_4, v_5, v_6, v_7, v_1, v_2, v_3, v_4, \dots$

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – www.di.unipi.it/~giovanni 8/16 

Sim
UniPisa
LaSpezia

Periodi lunghi o smistati


- Per evitare correlazioni
 - Quando le generazioni tengono un passo (non sempre)
 - Mai usare generatori uguali con lo stesso seme
 - Usare semi diversi, generati a partire da un seme solo
 - Rigenerandoli ogni tanto per allungare il periodo
 - VC₁: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1, v_2, \dots$
 - VC₂: $v_4, v_5, v_6, v_7, v_1, v_6, v_7, v_1, v_2, v_3, v_1, v_2, v_3, \dots$
- Comunque, per fortuna
 - Park & Miller $2^{31}-2$ $2^{31}-2$
 - Marsaglia KISS $2^{32}-1$ $\sim 2^{123}$
 - Mersenne Twister $2^{32}-1$ $2^{19937}-1$

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – www.di.unipi.it/~giovanni 9/16 

Sim
UniPisa
LaSpezia

Comportamento a regime

- Classi di obiettivi di simulazione
- Obiettivi a un termine definito
 - Il sistema ha un tempo di esercizio definito
 - Obiettivo della simulazione: lo stato a fine esercizio
- Obiettivi a regime
 - Il sistema non ha termine o è molto lontano o non ci interessa
 - Obiettivo della simulazione: lo stato a regime
- Esempio: l'impiegato tormentato
 - La percentuale di ozio a fine giornata
 - La percentuale di ozio durante il servizio

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – www.di.unipi.it/~giovanni 10/16 

Sim
UniPisa
LaSpezia

Il transitorio


- Condizioni iniziali
 - Diverse dalle condizioni a regime (per quanto ragionevoli)
 - Del sistema o solo del suo modello
 - Esempi: code vuote, macchine ferme, costi azzerati ...
- Condizioni di equilibrio a regime
 - Non sempre esistono: sistemi monotoni, oscillanti, caotici
 - Spesso cercate: con simulazioni che variano i parametri
 - Esistono? Quando iniziano?
- Transitorio
 - Il periodo in cui il sistema non è a regime a causa delle c.i.
 - Da studiare, perché interessa o perché si vuole eliminare

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – www.di.unipi.it/~giovanni 11/16 

Sim
UniPisa
LaSpezia

Identificare uno stato di regime

- Impostazione dell'esperimento di simulazione
 - Identificare (se esiste) uno stato transitorio
 - Eventualmente scartare il transitorio nell'analisi dei dati
- Determinare le osservazioni da scartare
 - Data una sequenza $X_1, X_2, \dots, X_t, X_{t+1}, \dots, X_m$
 - Trovare t che delimita il transitorio
 - Valori troppo bassi: la stima risente dei valori iniziali
 - Valori troppo alti: meno dati per le stime (o maggiori costi)
- Metodo generale
 - Giudizio dell'esperto
 - Strumenti di presentazione e di generazione dei dati

Giovanni A. Cignoni – Simulazione – www.di.unipi.it/~giovanni 12/16 

Sim
UniPisa
LaSpezia

Media mobile

- Strumento statistico
 - Media dei valori in un intorno di un dato di una sequenza
 - Strumento classico di analisi: prestazioni, dati finanziari, ...
- Dati $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ di una VC X e dati h e k
$$\bar{X}_i(h, k) = \sum_{j=i-h}^{i+k} \theta_j x_j$$
- Casi particolari
 - Semplice, tutti i θ_j sono uguali
 - Simmetrica, $h = k$ e $\theta_{j-m} = \theta_{j+m} \forall m \in [1, h]$

Giovanni A. Cignoni - Simulazione - www.di.unipi.it/~giovanni 13/16

Sim
UniPisa
LaSpezia

Riduzione della varianza

- Media mobile nella presentazione dei dati
 - Date n esecuzioni, ognuna con t valori di X :
Esecuzione 1: $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1t}$
...
Esecuzione n : $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nt}$
 - Medie dei t valori
$$\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_t \quad \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ji}$$
 - Medie con varianza attenuata
$$\bar{X}_{k+1}(k), \dots, \bar{X}_{t-k}(k) \quad \bar{X}_i(k) = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=i-k}^{i+k} \bar{X}_j$$

Giovanni A. Cignoni - Simulazione - www.di.unipi.it/~giovanni 14/16

Sim
UniPisa
LaSpezia

Variabili antitetiche

- La media campionaria è uno stimatore dei valori
 - La varianza campionaria “indica” l’affidabilità della stima
 - Parte della varianza si elimina insieme al transitorio
 - Aumentare il numero di simulazioni migliora la stima
- Ridurre la varianza nel campione
 - Nei dati, non solo nella loro presentazione
 - Correlazioni negative nella generazione dei dati di ingresso
 - Usare U e $1-U$ come sequenze di partenza per i generatori
- Perché funziona
 - $X_1 = h(U)$ e $X_2 = h(1-U)$ sono correlate negativamente se h è monotona (vero per il metodo dell’inversa)

Giovanni A. Cignoni - Simulazione - www.di.unipi.it/~giovanni 15/16

- G. Gallo, *Note di Simulazione*,
capp. 5.1, 5.2