Corso di Laurea in Informatica A.A. 2010/2011
Logica per la Programmazione
Primo Compitino del 1° dicembre 2010
Soluzioni proposte dai docenti

a) Si considerino le seguenti proposizioni:

$A \equiv$ Angelo viene alla festa

$B \equiv$ Bruno viene alla festa

$C \equiv$ Carlo viene alla festa

Quale delle seguenti formule proposizionali corrisponde al seguente enunciato?

"Se Bruno viene alla festa, allora, se Carlo non viene, ci viene Angelo"

1. $B \Rightarrow \sim C \vee A$
2. $\sim B \vee \sim C \vee A$
3. $B \Rightarrow (\sim C \Rightarrow A)$
4. $\sim B \wedge C \wedge A$
5. nessuno dei precedenti

Soluzione. La terza.

b) Si provi che le seguenti proposizioni sono delle tautologie:

1. $R \vee (\sim P \wedge (P \vee Q)) \Rightarrow Q \vee R$
2. $P \vee \sim Q \Rightarrow \sim R \equiv (P \Rightarrow \sim R) \wedge (R \Rightarrow Q)$

Soluzioni:

1. $\mathbf{R \vee (\sim P \wedge (P \vee Q)) \Rightarrow Q \vee R}$

Partiamo dalla premessa:

$\mathbf{R \vee (\sim P \wedge (P \vee Q))}$

$\equiv$ {Complemento}

$R \vee (\sim P \wedge Q))$

$\Rightarrow$ {Simpl-$\wedge$, [$\sim P \wedge Q$] occorre positivamente nella formula}

$\mathbf{R \vee Q}$

Quindi abbiamo dimostrato $\mathbf{R \vee (\sim P \wedge (P \vee Q)) \Rightarrow R \vee Q}$

2. $\mathbf{P \vee \sim Q \Rightarrow \sim R \equiv (P \Rightarrow \sim R) \wedge (R \Rightarrow Q)}$

Partiamo dalla parte sinistra:

$\mathbf{P \lor \sim Q \Rightarrow \sim R}$

$\equiv$ {Sempl-sinistra-$\Rightarrow$)

$(P \Rightarrow \sim R) \land (\sim Q \Rightarrow \sim R)$

$\equiv$ {Contropositiva}

$\mathbf{(P \Rightarrow \sim R) \land (R \Rightarrow Q)}$

Quindi abbiamo dimostrato $\mathbf{P \lor \sim Q \Rightarrow \sim R \equiv (P \Rightarrow \sim R) \land (R \Rightarrow Q)}$

---

c) La seguente proposizione è una tautologia? Si motivi la risposta.
   1. $((P \Rightarrow R) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

Soluzione: Sì, ecco una dimostrazione:

$(P \Rightarrow R) \Rightarrow P$

$\equiv$ {Elim-$\Rightarrow$}

$(\sim P \lor R) \Rightarrow P$

$\equiv$ {Elim-$\Rightarrow$}

$\sim(\sim P \lor R) \lor P$

$\equiv$ {De Morgan}

$(P \land \sim R) \lor P$

$\equiv$ {Assorbimento}

P

Quindi abbiamo dimostrato $(P \Rightarrow R) \Rightarrow P \equiv P$, che per la legge (Elim-$\equiv$) implica la formula desiderata

---

d) Utilizzando il calcolo del primo ordine si formalizzino i seguenti enunciati dichiarativi, indicando esplicitamente l'interpretazione intesa:
   1. Il quadrato di un numero naturale maggiore di due è maggiore del suo doppio
   2. Alcuni parenti di Carlo sono anche parenti di Bruno, ma non di Alberto

---

Soluzioni:

1. Il quadrato di un numero naturale maggiore di due è maggiore del suo doppio

Alfabeto: Una costante: **due**; due simboli di funzione: **quadrato** e **doppio**, entrambi di arietà 1; un **s**imbolo di predicato: > di arietà 2, infisso.

Interpretazione: I = (**N,** α) con **N** insieme dei naturali,

α(**due**)(n) = 2

α(**doppio**)(n) = 2 * n

α(**quadrato**)(n) = n * n

α(>)(n, m) = T se e solo se n è maggiore di m

Formula: **($\forall$ x. x > due $\Rightarrow$ quadrato(x) > doppio(x))**

2. **Alcuni parenti di Carlo sono anche parenti di Bruno, ma non di Alberto**

Alfabeto: Tre costanti: **Carlo**, **Bruno** e **Alberto** e un simbolo di predicato: **parenti**, di arietà due

Interpretazione: I = (**D,** α) con **D** l'insieme delle persone

α(**Carlo**) = "la persona di nome Carlo" (analogamente per **Bruno** e **Alberto**)

α(**parenti**)(x, y) = T se e solo se "x e y sono parenti"

Formula: **($\exists$x. parenti(x, Carlo) $\wedge$ parenti(x, Bruno) $\wedge$ ~parenti(x, Alberto))**

---

e) Si dimostri la validità della seguente formula del primo ordine:

1. ($\exists$x. ~P(x)) $\vee$ ($\exists$x. P(x) $\wedge$ Q(x)) $\Rightarrow$ ($\exists$x. P(x) $\Rightarrow$ Q(x))

Soluzione:

1. **($\exists$x. ~P(x)) $\vee$ ($\exists$x. P(x) $\wedge$ Q(x)) $\Rightarrow$ ($\exists$x. P(x) $\Rightarrow$ Q(x))**

Partiamo dalla premessa:

($\exists$x. ~P(x)) $\vee$ ($\exists$x. P(x) $\wedge$ Q(x))

$\equiv$ {$\exists$:$\vee$}

($\exists$x. ~P(x) $\vee$ (P(x) $\wedge$ Q(x))

$\equiv$ {Complemento}

($\exists$x. ~P(x) $\vee$ Q(x))

$\equiv$ {Elim-$\Rightarrow$}

($\exists$x. P(x) $\Rightarrow$ Q(x))

Quindi abbiamo dimostrato **($\exists$x. ~P(x)) $\vee$ ($\exists$x. P(x) $\wedge$ Q(x)) $\equiv$ ($\exists$x. P(x) $\Rightarrow$ Q(x))**, che per la legge (Elim-$\equiv$) implica la formula desiderata

---