LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2016-2017
Prima prova di verifica intermedia - 3/11/2016 - Soluzioni proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1
Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, usando opportune dimostrazioni (non tabelle di verità).

1. $\neg(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg(R \vee S \vee \neg P) \quad \equiv \quad \neg P \vee \big((Q \;\Rightarrow\; \neg R) \wedge (Q \;\Rightarrow\; \neg S)\big)$
2. $(\neg(P \wedge \neg Q) \Rightarrow S) \wedge \neg P \wedge (R \Rightarrow \neg S) \;\;\Rightarrow\;\; \neg R$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. Per dimostrare la formula semplifichiamo prima il membro sinistro e poi quello destro dell'equivalenza:

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg(R \vee S \vee \neg P) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & \neg(\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg(R \vee S \vee \neg P) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ Doppia Negazione}\} \\
 & (\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(R \vee S \vee \neg P) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan}), (\text{Doppia Negazione})\} \\
 & (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg R \wedge \neg S \wedge P) \\
\equiv & \quad \{(\text{Associativa}), (\text{Commutativa})\} \\
 & \neg Q \vee (\neg P \vee (\neg R \wedge \neg S \wedge P)) \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento})\} \\
 & \neg Q \vee (\neg P \vee (\neg R \wedge \neg S))
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg P \vee \big((Q \;\Rightarrow\; \neg R) \wedge (Q \;\Rightarrow\; \neg S)\big) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ due volte}\} \\
 & \neg P \vee \big((\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg S)\big) \\
\equiv & \quad \{(\text{Distributiva})\} \\
 & \neg P \vee (\neg Q \vee (\neg R \wedge \neg S)) \\
\equiv & \quad \{(\text{Associativa}), (\text{Commutativa})\} \\
 & \neg Q \vee (\neg P \vee (\neg R \wedge \neg S))
\end{array}$$

2. Si possono sviluppare varie dimostrazioni. Ne mostriamo due.

Dimostriamo la formula partendo dalla premessa dell'implicazione:

$$\begin{array}{ll}
 & (\neg(P \wedge \neg Q) \Rightarrow S) \wedge \neg P \wedge (\underline{R \Rightarrow \neg S}) \\
\equiv & \quad \{(\text{Contronominale}),(\text{Doppia Neg.})\} \\
 & \underline{(\neg(P \wedge \neg Q) \Rightarrow S)} \wedge \neg P \wedge \underline{(S \Rightarrow \neg R)} \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{trans.-} \Rightarrow), \text{ occ. pos.}\} \\
 & (\underline{\neg(P \wedge \neg Q)} \Rightarrow \neg R) \wedge \neg P \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan}),(\text{Doppia Negazione})\} \\
 & (\neg P \vee Q \Rightarrow \neg R) \wedge \underline{\neg P} \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{intro.-}\vee), \text{ occ. pos.}\} \\
 & \underline{(\neg P \vee Q \Rightarrow \neg R) \wedge (\neg P \vee Q)} \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{Modus Ponens}), \text{ occ. pos.}\} \\
 & \neg R
\end{array}$$

Dimostrazione con uso di ipotesi non tautologiche:

$$\begin{array}{ll}
 & \neg R \\
\Leftarrow & \quad \{\textbf{Ip: } R \Rightarrow \neg S, \text{ occ. neg., (Dop. Neg.)}\} \\
 & S \\
\Leftarrow & \quad \{\textbf{Ip: } \neg(P \wedge \neg Q) \Rightarrow S, \text{ occ. pos.}\} \\
 & \neg(P \wedge \neg Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & \neg P \vee Q \\
\equiv & \quad \{\textbf{Ip: } \neg P\} \\
 & T \vee Q \\
\equiv & \quad \{(\text{Zero})\} \\
 & T
\end{array}$$

ESERCIZIO 2

Si dica (motivando la risposta) se la seguente proposizione è una tautologia, se è una contraddizione o nessuna delle due:

$$(Q \vee R \Rightarrow P \wedge \neg S) \;\wedge\; (S \vee P \Rightarrow (\neg R \Rightarrow Q)) \;\Rightarrow\; \neg(S \vee R)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2
Non è una tautologia. Per mostrarlo basta trovare una interpretazione che renda falsa la formula (un *controesempio*). Per esempio: $P = \mathbf{T}$, $Q = \mathbf{T}$, $R = \mathbf{T}$ e $S = \mathbf{F}$ oppure $P = \mathbf{T}$, $Q = \mathbf{F}$, $R = \mathbf{T}$ e $S = \mathbf{F}$.

Non è una contraddizione. Per mostralo basta trovare una interpretazione che rende vera la formula. Per esempio: $P = \mathbf{T}$, $Q = \mathbf{T}$, $R = \mathbf{F}$ e $S = \mathbf{F}$.

ESERCIZIO 3

Utilizzando il principio di sostituzione dell'implicazione, si applichi l'ipotesi non tautologica $\neg P \Rightarrow \neg Q \vee S$ alla seguente formula, completando un singolo passo di dimostrazione con la relativa giustificazione.

$$\neg(R \wedge \neg S) \Rightarrow (\neg P \wedge R \;\Rightarrow\; \neg Q)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

$$\begin{array}{ll} & \neg(R \wedge \neg S) \Rightarrow (\underline{\neg P} \wedge R \;\Rightarrow\; \neg Q) \\ \Leftarrow & \{\textbf{Ip: } \neg P \Rightarrow \neg Q \vee S,\ \neg P \text{ occorre negativamente}\} \\ & \neg(R \wedge \neg S) \Rightarrow ((\neg Q \vee S) \wedge R \;\Rightarrow\; \neg Q) \end{array}$$

ESERCIZIO 4

Si consideri l'alfabeto del primo ordine con $\mathcal{C} = \{L, P\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{vicini, conosce\}$, dove i simboli di predicato *vicini* e *conosce* sono binari. Si formalizzi il seguente enunciato:

"Tutti i vicini di Paolo si conoscono,
ma non ci sono due vicini di Luca che abbiano un conoscente in comune"

considerando l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme delle persone e α è definita come segue:

- $\alpha(L) =$ "la persona chiamata Luca",
- $\alpha(P) =$ "la persona chiamata Paolo",
- $\alpha(vicini)(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se d è un vicino di d',
- $\alpha(conosce)(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se d e d' si conoscono.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4
L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$\begin{array}{l} (\forall x\,.\,(\forall y\,.\,vicini(x,P) \wedge vicini(y,P) \;\Rightarrow\; conosce(x,y)))\wedge \\ (\forall z\,.\,(\forall w\,.\,vicini(z,L) \wedge vicini(w,L) \;\Rightarrow\; \neg(\exists v\,.\,conosce(z,v) \wedge conosce(w,v)))) \end{array}$$

Alternativamente possiamo formalizzare come:

$$\begin{array}{l} (\forall x\,.\,(\forall y\,.\,vicini(x,P) \wedge vicini(y,P) \;\Rightarrow\; conosce(x,y)))\wedge \\ \neg(\exists z\,.\,(\exists w\,.\,vicini(z,L) \wedge vicini(w,L) \wedge (\exists v\,.\,conosce(z,v) \wedge conosce(w,v))) \end{array}$$

ESERCIZIO 5
Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall x \,.\, (\neg Q(x) \Rightarrow \neg(\forall y \,.\, P(x,y))))$$

nell'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{1,2,3\}$ ed α è definita come segue

$$\alpha(Q)(z) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } z \in \{1,2\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(P)(z,v) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } (z,v) \in \{(1,1),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli cioè $\mathcal{I}_\rho(\Phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ è un assegnamento arbitrario.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5
Mostriamo che la formula $\Phi = (\forall x \,.\, (\neg Q(x) \Rightarrow \neg(\forall y \,.\, P(x,y))))$ è *vera* nell'interpretazione data.

La formula Φ è una **quantificazione universale**, quindi per la regola (S8) è vera se e solo se assegnando a x un qualunque valore d del dominio $\mathcal{D}$ la formula nella portata è vera. Formalmente abbiamo che $\mathcal{I}_\rho(\Phi)$ è vera se, per ogni valore d tale che $d \in \mathcal{D}$, $\mathcal{I}_{\rho[d/x]}(\Phi_1)$ è vera, con $\Phi_1 = (\neg Q(x) \Rightarrow \neg(\forall y \,.\, P(x,y)))$.

Procediamo per casi esaminando i tre possibili valori del dominio.

[$d = 1$] Dato che Φ_1 è una **implicazione** per la regola (S6) abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\Phi_1)$ è falsa se $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\neg Q(x))$ è vera e $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\neg(\forall y \,.\, P(x,y)))$ è falsa, altrimenti $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\Phi_1)$ è vera. Notiamo che in questo caso dalla regola (S3) otteniamo $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\neg Q(x)) = \mathbf{F}$ dato che $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(Q(x)) = \mathbf{T}$. Formalmente, dalla regola (S1) abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(Q(x)) = \alpha(Q)(\alpha_{\rho[1/x]}(x)) = \alpha(Q)(1) = \mathbf{T}$. Quindi $\mathcal{I}_{\rho[1/x]}(\Phi_1)$ è vera.

[$d = 2$] Ripetendo un ragionamento analogo a quello del punto precedente abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\Phi_1)$ è falsa se $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\neg Q(x))$ è vera e $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\neg(\forall y \,.\, P(x,y)))$ è falsa, altrimenti $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\Phi_1)$ è vera. Analogamente al caso precedente abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\neg Q(x)) = \mathbf{F}$ dato che $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(Q(x)) = \mathbf{T}$. Quindi $\mathcal{I}_{\rho[2/x]}(\Phi_1)$ è vera.

[$d = 3$] Ripetendo un ragionamento analogo a quello dei punti precedenti abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\Phi_1)$ è falsa se $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\neg Q(x))$ è vera e $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\neg(\forall y \,.\, P(x,y)))$ è falsa, altrimenti $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\Phi_1)$ è vera. In questo caso abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\neg Q(x)) = \mathbf{T}$ dato che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(Q(x)) = \alpha(Q)(\alpha_{\rho[3/x]}(x)) = \alpha(Q)(3) = \mathbf{F}$.

Per calcolare il valore di verità di $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\neg(\forall y \,.\, P(x,y)))$ usiamo la regola (S3). Quindi sappiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\neg(\forall y \,.\, P(x,y))) = \mathbf{T}$ se $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}((\forall y \,.\, P(x,y))) = \mathbf{F}$ e $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\neg(\forall y \,.\, P(x,y))) = \mathbf{F}$ se $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}((\forall y \,.\, P(x,y))) = \mathbf{T}$. Inoltre dato che la formula $(\forall y \,.\, P(x,y))$ è una **quantificazione universale** dalla regola (S8) abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}((\forall y \,.\, P(x,y))) = \mathbf{T}$ se e solo se $\mathcal{I}_{\rho[3/x][d'/y]}(P(x,y)) = \mathbf{T}$ per qualsiasi valore del dominio $d' \in \mathcal{D}$.

Notiamo che nel caso di $d' = 3$ la formula risulta falsa. Formalmente dalla regola (S1) abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x][3/y]}(P(x,y)) = \alpha(P)(\alpha_{\rho[3/x][3/y]}(x), \alpha_{\rho[3/x][3/y]}(y)) = \alpha(P)(3,3) = \mathbf{F}$. In conclusione $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}((\forall y \,.\, P(x,y))) = \mathbf{F}$ e quindi $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\neg(\forall y \,.\, P(x,y))) = \mathbf{T}$. Quindi anche in questo caso abbiamo che $\mathcal{I}_{\rho[3/x]}(\Phi_1)$ è vera.