LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2016-2017
Primo Appello - 20/01/2017 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va prodotto un controesempio mostrando esplicitamente che rende la formula falsa.

1. $\big(Q \vee \neg S \Rightarrow \neg(P \wedge \neg R)\big) \ \wedge \ \big((P \vee R) \wedge \neg R\big) \ \Rightarrow \ S$
2. $\neg(A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee (D \wedge C) \Rightarrow \neg(A \wedge \neg B)) \ \Rightarrow \ C \wedge \neg A$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula è una tautologia come mostrato di seguito.

   Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

   $\big(Q \vee \neg S \Rightarrow \neg(P \wedge \neg R)\big) \ \wedge \ \big(\underline{(P \vee R) \wedge \neg R}\big)$

   $\equiv$ {(complemento)}

   $\big(\underline{Q \vee \neg S \Rightarrow \neg(P \wedge \neg R)}\big) \ \wedge \ (P \wedge \neg R)$

   $\equiv$ {(contronominale), (doppia negazione)}

   $\underline{\big(P \wedge \neg R \ \Rightarrow \ \neg(Q \vee \neg S)\big) \ \wedge \ (P \wedge \neg R)}$

   $\Rightarrow$ {(Modus Ponens), occ. pos.}

   $\underline{\neg(Q \vee \neg S)}$

   $\equiv$ {(De Morgan), (doppia negazione)}

   $\underline{\neg Q \wedge S}$

   $\Rightarrow$ {(semplif-$\wedge$), occ. pos.}

   S

2. La formula non è una tautologia, in quanto l'interpretazione: $\{A \mapsto \mathbf{T}, B \mapsto \mathbf{F}, C \mapsto \mathbf{T}, D \mapsto \mathbf{F}\}$ la rende falsa. La riga della tabella di verità corrispondente all'interpretazione data si costruice in modo standard.

ESERCIZIO 2

Si consideri l'alfabeto del primo ordine $\mathcal{A}$ con simboli di costante $\mathcal{C} = \{L, M\}$ e simboli di predicato $\mathcal{P} = \{persona(\_),$ $scrittore(\_)$, $libro(\_)$, $hascritto(\_,\_)\}$ e l'interpretazione $I = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme delle persone e dei libri, e

- $\alpha(L)$ è la persona Luca,
- $\alpha(M)$ è la persona Marco,
- $\alpha(persona)(p)$ è vera se e solo se p è una persona,
- $\alpha(scrittore)(p)$ è vera se e solo se p è uno scrittore,
- $\alpha(libro)(p)$ è vera se e solo se p è un libro,
- $\alpha(hascritto)(p, q)$ è vera se e solo se lo scrittore p ha scritto il libro q

Formalizzare i seguenti enunciati usando l'alfabeto $\mathcal{A}$ rispetto all'interpretazione I:

1. "Ogni persona è uno scrittore solo se ha scritto almeno un libro"

2. “Marco e Luca non hanno scritto nessun libro insieme”

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

1. $$(\forall x \,.\, (persona(x) \;\Rightarrow\; (scrittore(x) \;\Rightarrow\; (\exists y \,.\, libro(y) \wedge hascritto(x,y))))).$$

2. $$\neg(\exists x \,.\, libro(x) \wedge hascritto(M,x)) \wedge hascritto(L,x)).$$

ESERCIZIO 3
Si provi che la seguente formula è valida (A, B, C e D contengono la variabile libera x):

$$(\exists x \,.\, C \Rightarrow A) \wedge (\forall x \,.\, D \Rightarrow B) \wedge \neg(\exists x \,.\, A \vee (\neg B \wedge \neg A)) \;\Rightarrow\; \neg(\forall x \,.\, C \wedge \neg D)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3
Cominciamo col semplificare la conseguenza:

$$\begin{array}{ll}
 & \underline{\neg(\forall x \,.\, C \wedge \neg D)} \\
\equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\exists x \,.\, \underline{\neg(C \wedge \neg D))} \\
\equiv & \{(\text{De Morgan}), (\text{doppia negazione})\} \\
 & (\exists x \,.\, \neg C \vee D)
\end{array}$$

Quindi per la Regola di Skolemizzazione è sufficiente dimostrare la seguente formula, dove $\mathbf{d}$ è una nuova costante:

$$(\exists x \,.\, C \Rightarrow A) \wedge (\forall x \,.\, D \Rightarrow B) \wedge \neg(\exists x \,.\, A \vee (\neg B \wedge \neg A)) \wedge \big(C \Rightarrow A\big)[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, \neg C \vee D)$$

Partiamo dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & (\exists x \,.\, C \Rightarrow A) \wedge (\forall x \,.\, D \Rightarrow B) \wedge \neg(\exists x \,.\, A \vee (\neg B \wedge \neg A)) \wedge (C[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow A[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \\
\Rightarrow & \{(\text{semplif-}\wedge), \text{occ. pos.}\} \\
 & \underline{(\forall x \,.\, D \Rightarrow B)} \wedge \neg(\exists x \,.\, A \vee (\neg B \wedge \neg A)) \wedge (C[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow A[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \\
\Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall), \text{occ. pos.}\} \\
 & (D[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow B[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \wedge \neg(\exists x \,.\, \underline{A \vee (\neg B \wedge \neg A)}) \wedge (C[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow A[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \\
\equiv & \{(\text{complemento})\} \\
 & (D[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow B[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \wedge \underline{\neg(\exists x \,.\, A \vee \neg B)} \wedge (C[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow A[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (D[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow B[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \wedge (\forall x \,.\, \neg(A \vee \neg B)) \wedge (C[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow A[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \\
\Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall), \text{occ. pos.}\} \\
 & (D[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow B[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \wedge \underline{\neg(A[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \vee \neg B[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}])} \wedge (C[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow A[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan}), (\text{doppia negazione})\} \\
 & (D[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow B[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \wedge (\neg A[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \wedge B[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \wedge (\underline{C[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow A[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}])} \\
\equiv & \{(\text{contronominale})\} \\
 & (D[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow B[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \wedge \underline{(\neg A[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \wedge B[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \wedge (\neg A[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \;\Rightarrow\; \neg C[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}])} \\
\Rightarrow & \{(\text{Modus Ponens}), \text{occ. pos.}\} \\
 & \underline{(D[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \Rightarrow B[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]) \wedge B[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \wedge \neg C[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]} \\
\Rightarrow & \{(\text{semplif.}\wedge), \text{occ. pos.}\} \\
 & \underline{\neg C[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]} \\
\Rightarrow & \{(\text{intro-}\vee), \text{occ. pos}\} \\
 & \underline{\neg C[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}] \vee D[{}^{\mathbf{d}}\!/_{x}]}
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad \{(\text{intro-}\exists), \text{occ. pos}\}$

$\quad (\exists x \,.\, \neg C \vee D)$

ESERCIZIO 4

Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo **a, b: array [0, n) of int**):

"Ogni elemento dell'array **b** è uguale alla somma degli elementi di **a** che lo precedono strettamente oppure è uguale al massimo tra gli elementi pari di **a** che lo seguono."

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$\big(\forall x \,.\, x \in [0,n) \Rightarrow (b[x] = (\Sigma\ y\ :\ y \in [0,x) \,.\, a[y])) \vee (b[x] = (\max z :\ z \in [x,n) \wedge pari(a[y]) \,.\, a[y]))\big)$$

ESERCIZIO 5

Si consideri il seguente programma annotato (assumendo **a, c: array [0, n) of int**):

$\{\ n > 0\ \}$

```
y:=n-1; h:=0;
```

$\{\mathsf{Inv} :\ y \in [-1,n)\ \wedge\ h = \#\{i : i \in (y,n) \mid a[i] > c[i]\}\}\{\text{t: } y\}$

```
while (y >= 0) do
     if (a[y] > c[y])
          then h:=h+1
          else skip fi;
     y:=y-1
endw
```

$\{h = \#\{i : i \in [0,n) \mid a[i] > c[i]\}\}$

Scrivere e dimostrare l'ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Invariante $Inv : y \in [-1,n)\ \wedge\ h = \#\{i : i \in (y,n) \mid a[i] > c[i]\}$
Funzione di terminazione $t : y$
Condizione $E : y >= 0$
Comando C : `if.......fi; y:=y-1`

L' *Ipotesi di Invarianza* ($\{Inv \wedge E\}\ C\ \{Inv \wedge def(E)\}$) in questo caso è

$\{y \in [-1,n)\ \wedge\ h = \#\{i : i \in (y,n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y >= 0)\}$
`if (a[y] > c[y]) then h:=h+1 else skip fi; y:=y-1`
$\{y \in [-1,n)\ \wedge\ h = \#\{i : i \in (y,n) \mid a[i] > c[i]\}\ \wedge\ def(y >= 0)\}$

Per verificare la tripla applichiamo la Regola della Sequenza e quindi dobbiamo trovare una asserzione R che soddisfi le seguenti triple:

(5.1) $\{y \in [-1,n) \wedge h = \#\{i : i \in (y,n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y >= 0)\}$ `if (a[y] > c[y]) then h:=h+1 else skip fi` $\{R\}$

(5.2) $\{R\}$ `y:=y-1` $\{y \in [-1,n)\ \wedge\ h = \#\{i : i \in (y,n) \mid a[i] > c[i]\}\ \wedge\ def(y >= 0)\}$

Per determinare R usiamo l'Assioma dell'Assegnamento in (5.2) e troviamo

$\quad def(y-1) \wedge \big(y \in [-1,n)\ \wedge\ h = \#\{i : i \in (y,n) \mid a[i] > c[i]\}\ \wedge\ def(y >= 0)\big)[^{y-1}/_{y}]$

$\equiv \quad \{\text{sostituzione, definizione di } def\}$

$\quad y-1 \in [-1,n)\ \wedge\ h = \#\{i : i \in (y-1,n) \mid a[i] > c[i]\}\ \wedge\ def(y-1 >= 0)$

Resta quindi da verificare la tripla (5.1) usando l'asserzione R appena calcolato. Per dimostrare (5.1) data applichiamo la Regola del Condizionale riducendoci a dimostrare che:

(5.1.1) $y \in [-1, n) \ \wedge \ h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y >= 0) \Rightarrow def(a[y] > c[y])$

(5.1.2) $\{y \in [-1, n) \ \wedge \ h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y >= 0) \wedge a[y] > c[y]\}\}$ `h:=h+1` $\{R\}$

(5.1.3) $\{y \in [-1, n) \ \wedge \ h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y >= 0) \wedge \neg(a[y] > c[y])\}$ `skip` $\{R\}$

(5.1.1) Per dimostrare l'implicazione partiamo dalla conseguenza

$$\begin{array}{ll} & def(a[y] > c[y]) \\ \equiv & \quad \{\text{definizione di } def\} \\ & y \in dom(a) \wedge y \in dom(c) \\ \equiv & \quad \{\textbf{Ip}\text{: } y \in [-1, n) \ \wedge \ dom(a) = dom(c) = [0, n) \ \wedge \ y >= 0\} \\ & \mathbf{T} \end{array}$$

(5.1.2) Per verificare la tripla applichiamo la Regola dell'Assegnamento e ci riduciamo a dimostrare che

$$y \in [-1, n) \ \wedge \ h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y >= 0) \wedge a[y] > c[y] \ \Rightarrow \ def(h + 1) \wedge R[^{h+1}/_h]$$

Partiamo dalla conseguenza

$$\begin{array}{ll} & def(h + 1) \wedge R[^{h+1}/_h] \\ \equiv & \quad \{\text{definizione di } def \text{ e sostituzione}\} \\ & \underline{y - 1 \in [-1, n)} \ \wedge \ h + 1 = \#\{i : i \in (y - 1, n) \mid a[i] > c[i]\} \\ \equiv & \quad \{\textbf{Ip}\text{: } y \in [-1, n), y >= 0\} \\ & h + 1 = \underline{\#\{i : i \in (y - 1, n) \mid a[i] > c[i]\}} \\ \equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\#),\ \textbf{Ip}\text{: } a[y] > c[y]\ \} \\ & h + 1 = \underline{\#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} + 1} \\ \equiv & \quad \{\textbf{Ip}\text{: } h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\}\ \} \\ & h + 1 = h + 1 \\ \equiv & \quad \{\text{calcolo}\ \} \\ & \mathbf{T} \end{array}$$

(5.1.3) Per verificare la tripla applichiamo l'assioma (SKIP) e la regola (PRE) e ci riduciamo a dimostrare che

$$y \in [-1, n) \ \wedge \ h = \#\{i : i \in (y, n) \mid a[i] > c[i]\} \wedge (y >= 0) \wedge \neg(a[y] > c[y]) \ \Rightarrow \ R$$

La dimostrazione procede in modo analogo al caso (5.1.2) usando la legge (Intervallo-#). In questo caso tuttavia abbiamo che $\neg(a[y] > c[y])$.

ESERCIZIO 6

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **c,d: array [0, n) of int**):

$\{k \in (0, n) \ \wedge \ \big(\forall i \,.\, i \in [0, k) \ \Rightarrow \ c[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, d[y]) \ - (\Sigma x : x \in [0, i] \,.\, x)\big)\}$

```
    c[k] := c[k-1] + d[k] - k
```

$\{\ \big(\forall i \,.\, i \in [0, k] \ \Rightarrow \ c[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, d[y]) \ - (\Sigma x : x \in [0, i] \,.\, x)\big)\}$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Applicando l' Assioma dell'Aggiornamento Selettivo e la regola (PRE) ci riduciamo a verificare che:

$$k \in (0,n) \;\wedge\; \big(\forall i \,.\, i \in [0,k) \;\Rightarrow\; c[i] = (\Sigma y : y \in [0,i] \,.\, d[y]) \;-(\Sigma x : x \in [0,i] \,.\, x)\big) \Rightarrow$$
$$def(k) \wedge k \in dom(c) \wedge def(c[k-1]+d[k]-k) \wedge Q[^a/_c]$$

dove $a = c[^{c[k-1]+d[k]-k}/_k]$ e

$$Q = \big(\forall i \,.\, i \in [0,k] \;\Rightarrow\; c[i] = (\Sigma y : y \in [0,i] \,.\, d[y]) \;-(\Sigma x : x \in [0,i] \,.\, x)\big).$$

Partiamo dalla conseguenza

$def(k) \wedge k \in dom(c) \wedge def(c[k-1]+d[k]-k) \wedge Q[^a/_c]$

$\equiv$ {definizione di def}

$\underline{k \in dom(c) \wedge k-1 \in dom(c) \wedge k \in dom(d)} \wedge Q[^a/_c]$

$\equiv$ {**Ip**: $dom(c) = dom(d) = [0,n)$, $k \in (0,n)$}

$Q[^a/_c]$

$\equiv$ {sostituzione}

$\big(\forall i \,.\, i \in [0,k] \;\Rightarrow\; a[i] = (\Sigma y : y \in [0,i] \,.\, d[y]) \;-(\Sigma x : x \in [0,i] \,.\, x)\big)$

$\equiv$ {(Intervallo-$\forall$)}

$\underline{\big(\forall i \,.\, i \in [0,k) \;\Rightarrow\; a[i] = (\Sigma y : y \in [0,i] \,.\, d[y]) \;-(\Sigma x : x \in [0,i] \,.\, x)\big)} \wedge a[k] = (\Sigma y : y \in [0,k] \,.\, d[y]) \;-(\Sigma x : x \in [0,k] \,.\, x)$

$\equiv$ $\big\{$**Ip**: $\big(\forall i \,.\, i \in [0,k) \;\Rightarrow\; c[i] = (\Sigma y : y \in [0,i] \,.\, d[y]) \;-(\Sigma x : x \in [0,i] \,.\, x)\big)$, definizione di a $\big\}$

$\underline{a[k]} = (\Sigma y : y \in [0,k] \,.\, d[y]) \;-(\Sigma x : x \in [0,k] \,.\, x)$

$\equiv$ $\big\{$definizione di $a = c[^{c[k-1]+d[k]-k}/_k]\big\}$

$c[k-1]+d[k]-k = \underline{(\Sigma y : y \in [0,k] \,.\, d[y])} \;- \underline{(\Sigma x : x \in [0,k] \,.\, x)}$

$\equiv$ {(Intervallo-Σ)}

$c[k-1]+d[k]-k = (\Sigma y : y \in [0,k-1] \,.\, d[y]) + d[k] \;-((\Sigma x : x \in [0,k-1] \,.\, x) + k)$

$\equiv$ {calcolo}

$c[k-1] = (\Sigma y : y \in [0,k-1] \,.\, d[y]) - (\Sigma x : x \in [0,k-1] \,.\, x)$

$\equiv$ {**Ip**: $c[k-1] = (\Sigma y : y \in [0,k-1] \,.\, d[y]) - (\Sigma x : x \in [0,k-1] \,.\, x)$}

T