

LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2017-2018

Primo Appello - 18/01/2018 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va prodotto un controesempio che rende la formula falsa.

1. $\neg P \wedge (\neg(\neg Q \vee S) \Rightarrow P \wedge \neg R) \Rightarrow R \vee \neg Q$
2. $(\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \wedge \neg Q)) \wedge (S \vee \neg(S \vee R)) \Rightarrow (\neg S \Rightarrow \neg P \vee Q)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula non è una tautologia. Per mostrarlo basta trovare una interpretazione che renda falsa la formula (un *controesempio*). Per esempio: $P = \mathbf{F}$, $Q = \mathbf{T}$, $R = \mathbf{F}$ e $S = \mathbf{T}$.
2. La formula è una tautologia. Sviluppiamo una dimostrazione partendo dalla premessa dell'implicazione per arrivare alla conclusione:

$$\begin{aligned} & (\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \wedge \neg Q)) \wedge (S \vee \neg(S \vee R)) \\ \equiv & \quad \{(De Morgan)\} \\ & (\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \wedge \neg Q)) \wedge (S \vee \neg(S \wedge \neg R)) \\ \equiv & \quad \{(Complemento)\} \\ & (\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \wedge \neg Q)) \wedge (S \vee \neg R) \\ \equiv & \quad \{(Elim-\Rightarrow), (Doppia Negazione)\} \\ & ((P \Rightarrow Q) \vee (R \wedge \neg Q)) \wedge (S \vee \neg R) \\ \Rightarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), \text{occ. pos.}\} \\ & ((P \Rightarrow Q) \vee R) \wedge (S \vee \neg R) \\ \Rightarrow & \quad \{(Risoluzione), \text{occ. pos.}\} \\ & (P \Rightarrow Q) \vee S \\ \equiv & \quad \{(Elim-\Rightarrow)\} \\ & (\neg P \vee Q) \vee S \\ \equiv & \quad \{(Elim-\Rightarrow)\} \\ & \neg S \Rightarrow \neg P \vee Q \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

Si consideri l'alfabeto del primo ordine \mathcal{A} con simboli di predicato $\mathcal{P} = \{stud(-), univ(-), iscr(-, -), =(-, -)\}$ e l'interpretazione $I = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove \mathcal{D} è l'insieme studenti e delle università, e

- $\alpha(stud)(p)$ è vera se e solo se p è uno studente,
- $\alpha(univ)(p)$ è vera se e solo se p è una università,
- $\alpha(iscr)(p, q)$ è vera se e solo se lo studente p è iscritto all'università q ,
- $\alpha(=)(p, q)$ è vera se e solo se p e q sono uguali.

Formalizzare il seguente enunciato usando l'alfabeto \mathcal{A} rispetto all'interpretazione I :

“Ogni studente è iscritto ad una università e ogni università ha almeno due studenti iscritti”

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$(\forall x . stud(x) \Rightarrow (\exists y . univ(y) \wedge iscr(x, y))) \wedge (\forall w . univ(w) \Rightarrow (\exists v . \exists z . stud(v) \wedge stud(z) \wedge \neg(v = z) \wedge iscr(v, w) \wedge iscr(z, w)))$$

ESERCIZIO 3

Si provi che la seguente formula è valida (P, Q, R e S contengono la variabile libera x):

$$(\forall x . S \Rightarrow R) \wedge (\exists x . \neg P \vee S) \wedge \neg(\exists x . R \vee Q) \Rightarrow (\exists x . Q) \vee \neg(\forall x . P)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Semplifichiamo la conseguenza:

$$\begin{aligned} & (\exists x . Q) \vee \neg(\forall x . P) \\ \equiv & \{(De Morgan)\} \\ & (\exists x . Q) \vee (\exists x . \neg P) \\ \equiv & \{(\exists : \vee)\} \\ & (\exists x . Q \vee \neg P) \end{aligned}$$

A questo punto utilizzando la regola della **Skolemizzazione** è sufficiente dimostrare che:

$$(\forall x . S \Rightarrow R) \wedge (\exists x . \neg P \vee S) \wedge \neg(\exists x . R \vee Q) \wedge (\neg P(a) \vee S(a)) \Rightarrow (\exists x . Q \vee \neg P)$$

con a costante nuova. Per dimostrare la formula partiamo dalla premessa:

$$\begin{aligned} & \underline{(\forall x . S \Rightarrow R) \wedge (\exists x . \neg P \vee S) \wedge \neg(\exists x . R \vee Q) \wedge (\neg P(a) \vee S(a))} \\ \Rightarrow & \{(Sempl-\wedge), \text{ occor. pos.}\} \\ & (\forall x . S \Rightarrow R) \wedge \underline{\neg(\exists x . R \vee Q)} \wedge (\neg P(a) \vee S(a)) \\ \equiv & \{(De Morgan)\} \\ & \underline{(\forall x . S \Rightarrow R)} \wedge \underline{(\forall x . \neg(R \vee Q))} \wedge (\neg P(a) \vee S(a)) \\ \Rightarrow & \{(Elim-\forall), \text{ occor. pos.}\} \\ & (S(a) \Rightarrow R(a)) \wedge \underline{\neg(R(a) \vee Q(a))} \wedge (\neg P(a) \vee S(a)) \\ \equiv & \{(De Morgan)\} \\ & (S(a) \Rightarrow R(a)) \wedge \underline{(\neg R(a) \wedge \neg Q(a))} \wedge (\neg P(a) \vee S(a)) \\ \Rightarrow & \{(Sempl-\wedge), \text{ occor. pos.}\} \\ & \underline{(S(a) \Rightarrow R(a))} \wedge \neg R(a) \wedge (\neg P(a) \vee S(a)) \\ \equiv & \{(Elim-\Rightarrow)\} \\ & \underline{(\neg S(a) \vee R(a))} \wedge \neg R(a) \wedge (\neg P(a) \vee S(a)) \\ \equiv & \{(Complemento)\} \\ & \underline{\neg S(a) \wedge \neg R(a)} \wedge (\neg P(a) \vee S(a)) \\ \equiv & \{(Complemento)\} \\ & \underline{\neg S(a) \wedge \neg R(a) \wedge \neg P(a)} \\ \Rightarrow & \{(Sempl-\wedge), \text{ occor. pos.}\} \\ & \underline{\neg P(a)} \\ \Rightarrow & \{(Intro-\vee), \text{ occor. pos.}\} \\ & \underline{\neg P(a) \vee Q(a)} \\ \Rightarrow & \{(Intro-\exists), \text{ occor. pos.}\} \end{aligned}$$

$$(\exists x. \neg P \vee Q)$$

ESERCIZIO 4

Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo **a, b: array [0, n] of int**):

“Per ogni elemento dell’array **a** esiste un elemento in **b** che è minore della somma degli elementi di **a** che lo precedono ed uno che è uguale al minimo tra gli elementi pari di **a** che lo seguono.”

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$(\forall x. x \in [0, n) \Rightarrow (\exists y. y \in [0, n) \wedge b[y] < (\sum i : i \in [0, x). a[i])) \wedge (\exists z. z \in [0, n) \wedge b[z] = (\min i : i \in [x, n) \wedge \text{pari}(a[i]). a[i]))$$

ESERCIZIO 5

Assumendo **a, b: array [0, n] of int**, si consideri il seguente frammento di programma annotato,

```
{c = 0 ∧ y = 0}
{Inv: y ∈ [0, n] ∧ (c = #{i : i ∈ [0, y] | pari(i) ∧ a[i]2 > b[i]})}{t: n - y}
while y < n do
  if (y mod 2 = 0 ∧ a[y] * a[y] > b[y])
    then c, y := c+1, y+1
    else y := y+1
  fi
endw
{(c = #{i : i ∈ [0, n] | pari(i) ∧ a[i]2 > b[i]})}
```

Si scrivano le ipotesi di progresso ed invarianza. Inoltre si dimostri l’ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Invariante $Inv : y \in [0, n] \wedge (c = \#\{i : i \in [0, y] \mid \text{pari}(i) \wedge a[i]^2 > b[i]\})$
 Funzione di terminazione $t : n - y$

1. Ipotesi di Invarianza:

$$\{y \in [0, n] \wedge (c = \#\{i : i \in [0, y] \mid \text{pari}(i) \wedge a[i]^2 > b[i]\}) \wedge y < n\}$$

```
if (y mod 2 = 0 ∧ a[y] * a[y] > b[y])
  then c, y := c+1, y+1
  else y := y+1 fi
```

$$\{y \in [0, n] \wedge (c = \#\{i : i \in [0, y] \mid \text{pari}(i) \wedge a[i]^2 > b[i]\}) \wedge \text{def}(y < n) \}$$

2. Ipotesi di Progresso:

$$\{y \in [0, n] \wedge (c = \#\{i : i \in [0, y] \mid \text{pari}(i) \wedge a[i]^2 > b[i]\}) \wedge y < n \wedge n - y = V\}$$

```
if (y mod 2 = 0 ∧ a[y] * a[y] > b[y])
  then c, y := c+1, y+1
  else y := y+1 fi
```

$$\{n - y < V\}$$

Dimostriamo l’ipotesi di invarianza applicando la regola del **Condizionale**. Quindi dobbiamo verificare che

$$(5.1.1) \quad Inv \wedge y < n \Rightarrow \text{def}(y \bmod 2 = 0 \wedge a[y] * a[y] > b[y])$$

$$(5.1.2) \{Inv \wedge y < n \wedge (y \bmod 2 = 0 \wedge a[y] * a[y] > b[y])\} \quad c, y := c+1, y+1 \{Inv \wedge def(y < n)\}$$

$$(5.1.3) \{Inv \wedge y < n \wedge \neg(y \bmod 2 = 0 \wedge a[y] * a[y] > b[y])\} \quad y := y + 1 \{Inv \wedge def(y < n)\}$$

(5.1.1) Abbiamo che

$$\begin{aligned} & def(y \bmod 2 = 0 \wedge a[y] * a[y] > b[y]) \\ \equiv & \quad \{\text{definizione di } def\} \\ & y \in dom(a) \wedge y \in dom(b) \wedge 2 \neq 0 \\ \equiv & \quad \{\mathbf{Ip}: dom(a) = dom(b) = [0, n], y \in [0, n], y < n\} \end{aligned}$$

T

(5.1.2) Per dimostrare la tripla applichiamo la regola dell' **Assegnamento Multiplo** e ci riduciamo a dimostrare

$$\begin{aligned} & Inv \wedge y < n \wedge y \bmod 2 = 0 \wedge a[y] * a[y] > b[y] \Rightarrow \\ & def(c+1) \wedge def(y+1) \wedge (Inv \wedge def(y < n))^{[c+1, y+1/c, y]} \end{aligned}$$

Partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned} & def(c+1) \wedge def(y+1) \wedge (Inv \wedge def(y < n))^{[c+1, y+1/c, y]} \\ \equiv & \quad \{\text{sostituzione, definizione di } def\} \\ & y+1 \in [0, n] \wedge (c+1 = \#\{i : i \in [0, y+1] \mid pari(i) \wedge a[i]^2 > b[i]\}) \\ \equiv & \quad \{\mathbf{Ip}: y \in [0, n], y < n\} \\ & c+1 = \#\{i : i \in [0, y+1] \mid pari(i) \wedge a[i]^2 > b[i]\} \\ \equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\#), \mathbf{Ip}: y \bmod 2 = 0 \wedge a[y] * a[y] > b[y]\} \\ & c+1 = \#\{i : i \in [0, y] \mid pari(i) \wedge a[i]^2 > b[i]\} + 1 \\ \equiv & \quad \{\mathbf{Ip}: c = \#\{i : i \in [0, y] \mid pari(i) \wedge a[i]^2 > b[i]\}\} \end{aligned}$$

T

(5.1.3) Per dimostrare la tripla applichiamo la regola dell' **Assegnamento** e ci riduciamo a dimostrare

$$\begin{aligned} & Inv \wedge y < n \wedge \neg(y \bmod 2 = 0 \wedge a[y] * a[y] > b[y]) \Rightarrow \\ & def(y+1) \wedge (Inv \wedge def(y < n))^{[y+1/y]} \end{aligned}$$

Partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned} & def(y+1) \wedge (Inv \wedge def(y < n))^{[y+1/y]} \\ \equiv & \quad \{\text{sostituzione, definizione di } def\} \\ & y+1 \in [0, n] \wedge (c = \#\{i : i \in [0, y+1] \mid pari(i) \wedge a[i]^2 > b[i]\}) \\ \equiv & \quad \{\mathbf{Ip}: y \in [0, n], y < n\} \\ & c = \#\{i : i \in [0, y+1] \mid pari(i) \wedge a[i]^2 > b[i]\} \\ \equiv & \quad \{(\text{Intervallo-}\#), \mathbf{Ip}: \neg(y \bmod 2 = 0 \wedge a[y] * a[y] > b[y])\} \\ & c = \#\{i : i \in [0, y] \mid pari(i) \wedge a[i]^2 > b[i]\} \\ \equiv & \quad \{\mathbf{Ip}: (c = \#\{i : i \in [0, y] \mid pari(i) \wedge a[i]^2 > b[i]\})\} \end{aligned}$$

T

ESERCIZIO 6

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a, c: array [0, k] of int**):

$$\{h \in [1, k) \wedge (\forall i. i \in [0, h) \Rightarrow c[i] > (\Sigma y : y \in [0, i]. a[y]))\}$$

$$c[h] := c[h-1] + a[h] + 1$$

$$\{(\forall i. i \in [0, h) \Rightarrow c[i] > (\Sigma y : y \in [0, i]. a[y]))\}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Applicando la regola dell' **Aggiornamento Selettivo** dobbiamo verificare che:

$$h \in [1, k) \wedge (\forall i. i \in [0, h) \Rightarrow c[i] > (\Sigma y : y \in [0, i]. a[y])) \Rightarrow$$

$$h \in \text{dom}(c) \wedge \text{def}(h) \wedge \text{def}(c[h-1] + a[h] + 1) \wedge R[b/c]$$

dove $b = c^{[c[h-1]+a[h]+1]/h}$ e $R = (\forall i. i \in [0, h) \Rightarrow c[i] > (\Sigma y : y \in [0, i]. a[y]))$.

Partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned} & h \in \text{dom}(c) \wedge \text{def}(h) \wedge \text{def}(c[h-1] + a[h] + 1) \wedge R[b/c] \\ \equiv & \{\text{definizione di def}\} \\ & h \in \text{dom}(c) \wedge h-1 \in \text{dom}(c) \wedge h \in \text{dom}(a) \wedge R[b/c] \\ \equiv & \{\mathbf{Ip}: h \in [1, k) \wedge \text{dom}(a) = \text{dom}(c) = [0, k)\} \\ & R[b/c] \\ \equiv & \{\text{sostituzione}\} \\ & (\forall i. i \in [0, h) \Rightarrow b[i] > (\Sigma y : y \in [0, i]. a[y])) \\ \equiv & \{(\text{Intervallo-}\forall), \mathbf{Ip}: h > 0\} \\ & (\forall i. i \in [0, h) \Rightarrow \underline{b[i]} > (\Sigma y : y \in [0, i]. a[y])) \wedge \underline{b[h]} > (\Sigma y : y \in [0, h]. a[y]) \\ \equiv & \{\text{definizione di } b\} \\ & (\forall i. i \in [0, h) \Rightarrow c[i] > (\Sigma y : y \in [0, i]. a[y])) \wedge c[h-1] + a[h] + 1 > (\Sigma y : y \in [0, h]. a[y]) \\ \equiv & \{\mathbf{Ip}: (\forall i. i \in [0, h) \Rightarrow c[i] > (\Sigma y : y \in [0, i]. a[y]))\} \\ & c[h-1] + a[h] + 1 > (\Sigma y : y \in [0, h]. a[y]) \\ \equiv & \{(\text{Intervallo-}\Sigma)\} \\ & c[h-1] + a[h] + 1 > (\Sigma y : y \in [0, h-1]. a[y]) + a[h] \\ \equiv & \{\mathbf{Ip}: c[h-1] > (\Sigma y : y \in [0, h-1]. a[y]), \text{calcolo}\} \\ & \mathbf{T} \end{aligned}$$