

LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2014-2015

Secondo Appello - 11/2/2015 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va mostrato un controesempio con relativa giustificazione.

1. $P \wedge S \Rightarrow Q \wedge \neg R \equiv \neg Q \vee R \Rightarrow \neg P$
2. $\neg(P \Rightarrow (Q \vee S) \wedge \neg R) \wedge (Q \vee S) \Rightarrow R$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula non è una tautologia, in quanto l'interpretazione: $\{P \mapsto \mathbf{T}, Q \mapsto \mathbf{F}, R \mapsto \mathbf{F}, S \mapsto \mathbf{F}\}$ (o in alternativa $R \mapsto \mathbf{T}$ e $Q \mapsto \mathbf{T}$) la rende falsa. Infatti la formula $P \wedge S \Rightarrow Q \wedge \neg R$ risulta \mathbf{T} dato che $P \wedge S$ è \mathbf{F} . Al contrario la formula $\neg Q \vee R \Rightarrow \neg P$ risulta \mathbf{F} dato che $\neg P$ è \mathbf{F} mentre $\neg Q \vee R$ è \mathbf{T} .
2. La formula è una tautologia come mostrato dalla seguente dimostrazione. Partiamo dalla premessa:

$$\begin{aligned} & \neg(P \Rightarrow (Q \vee S) \wedge \neg R) \wedge (Q \vee S) \\ \equiv & \quad \{(\neg \Rightarrow)\} \\ & P \wedge \neg((Q \vee S) \wedge \neg R) \wedge (Q \vee S) \\ \equiv & \quad \{\text{(De Morgan)}\} \\ & P \wedge (\neg(Q \vee S) \vee \neg\neg R) \wedge (Q \vee S) \\ \equiv & \quad \{\text{(doppia negazione)}\} \\ & P \wedge (\neg(Q \vee S) \vee R) \wedge (Q \vee S) \\ \equiv & \quad \{\text{(complemento)}\} \\ & P \wedge R \wedge (Q \vee S) \\ \Rightarrow & \quad \{\text{(sempl-}\wedge\text{) 2 volte, occorrenze positive}\} \\ & R \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

Si formalizzi il seguente enunciato usando l'alfabeto con simboli di predicato $\{conosce(-, -), italiano(-)\}$ rispetto all'interpretazione fissata (\mathcal{P}, α) , dove \mathcal{P} è l'insieme delle persone, $\alpha(conosce)(p, q)$ è vera se e solo se p conosce q , e $\alpha(italiano)(p)$ è vera se e solo se p è italiano:

“C'è chi conosce solo italiani, ma tutti conoscono almeno un italiano.”

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

$$(\exists x. (\forall y. conosce(x, y) \Rightarrow italiano(y))) \wedge (\forall z. (\exists w. conosce(z, w) \wedge italiano(w)))$$

ESERCIZIO 3

Si provi che la seguente formula è valida (A, B, C e D contengono la variabile libera x):

$$(\forall x. \neg D) \wedge \neg(\exists x. \neg(A \Rightarrow D)) \wedge (\exists x. \neg A \Rightarrow C \wedge B) \Rightarrow (\exists x. B)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Per dimostrare la formula applichiamo la Regola di Inferenza della Skolemizzazione e ci riduciamo a dimostrare

$$(\forall x. \neg D) \wedge \neg(\exists x. \neg(A \Rightarrow D)) \wedge (\exists x. \neg A \Rightarrow C \wedge B) \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \Rightarrow (\exists x. B)$$

Quindi partiamo dalla premessa:

$$\begin{aligned} & (\forall x. \neg D) \wedge \neg(\exists x. \neg(A \Rightarrow D)) \wedge (\exists x. \neg A \Rightarrow C \wedge B) \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \\ \Rightarrow & \{(\text{semp-l-}\wedge)\} \\ & (\forall x. \neg D) \wedge \neg(\exists x. \neg(A \Rightarrow D)) \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \\ \equiv & \{(\text{De Morgan}), \text{doppia negazione}\} \\ & (\forall x. \neg D) \wedge (\forall x. A \Rightarrow D) \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \\ \Rightarrow & \{(\text{elim-}\forall) \text{ 2 volte, occorrenze positive}\} \\ & \neg D[a/x] \wedge (A[a/x] \Rightarrow D[a/x]) \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \\ \equiv & \{(\text{contronominale})\} \\ & \neg D[a/x] \wedge (\neg D[a/x] \Rightarrow \neg A[a/x]) \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \\ \Rightarrow & \{(\text{Modus Ponens}), \text{occorrenza positiva}\} \\ & \neg A[a/x] \wedge (\neg A[a/x] \Rightarrow C[a/x] \wedge B[a/x]) \\ \Rightarrow & \{(\text{Modus Ponens})\} \\ & C[a/x] \wedge B[a/x] \\ \Rightarrow & \{(\text{semp-l-}\wedge)\} \\ & B[a/x] \\ \Rightarrow & \{(\text{intro-}\exists)\} \\ & (\exists x. B) \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$: array $[0, n)$ of int):

“Ogni elemento dell'array \mathbf{a} è uguale al massimo tra gli elementi di \mathbf{b} che lo precedono oppure al minimo tra gli elementi di \mathbf{c} che lo seguono”.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$(\forall i. i \in [0, n) \Rightarrow a[i] = (\max j : j \in [0, i]. b[j]) \vee a[i] = (\min j : j \in [i, n). c[j])).$$

ESERCIZIO 5

Si consideri il seguente frammento di programma annotato (assumendo **a**: **array** [0, n] of int):

```

sum, k := 0, 0;
{Inv : k ∈ [0, n] ∧ (∀j . j ∈ [0, k] ⇒ a[j] < w) ∧ sum * 2 = k * (k + 1)}{t: n - k}
while (a[k] < w) and (k < n) do
    k := k + 1;
    sum := sum + k
endw
{(∀j . j ∈ [0, k] ⇒ a[j] < w) ∧ sum * 2 = k * (k + 1)}

```

Scrivere e dimostrare l'ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Invariante $Inv : k \in [0, n] \wedge (\forall j . j \in [0, k] \Rightarrow a[j] < w) \wedge sum * 2 = k * (k + 1)$

Funzione di terminazione $t : n - k$

Condizione $E : (a[k] < w) \text{ and } (k < n)$

Comando $C : k := k + 1; sum := sum + k$

L' *Ipotesi di Invarianza* ($\{Inv \wedge E\} C \{Inv \wedge def(E)\}$) in questo caso è

$$\{k \in [0, n] \wedge (\forall j . j \in [0, k] \Rightarrow a[j] < w) \wedge sum * 2 = k * (k + 1) \wedge (a[k] < w) \wedge (k < n)\}$$

$$k := k + 1; sum := sum + k$$

$$\{k \in [0, n] \wedge (\forall j . j \in [0, k] \Rightarrow a[j] < w) \wedge sum * 2 = k * (k + 1) \wedge def((a[k] < w) \wedge (k < n))\}$$

Siano P e Q la preconditione e la postcondizione della tripla ovvero

$$P = k \in [0, n] \wedge (\forall j . j \in [0, k] \Rightarrow a[j] < w) \wedge sum * 2 = k * (k + 1) \wedge (a[k] < w) \wedge (k < n)$$

$$Q = k \in [0, n] \wedge (\forall j . j \in [0, k] \Rightarrow a[j] < w) \wedge sum * 2 = k * (k + 1) \wedge def((a[k] < w) \wedge (k < n))$$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare una asserzione R tale che le seguenti triple siano verificate:

(5.1) $\{P\} \quad k := k + 1 \quad \{R\}$

(5.2) $\{R\} \quad sum := sum + k \quad \{Q\}$

Per determinare R , usiamo l'Assioma dell'Assegnamento in (5.2) e troviamo

$$\begin{aligned}
 & def(sum + k) \wedge Q^{[sum+k/sum]} \\
 \equiv & \{sostituzione, definizione di def\} \\
 & k \in [0, n] \wedge (\forall j . j \in [0, k] \Rightarrow a[j] < w) \wedge (sum + k) * 2 = k * (k + 1) \wedge def((a[k] < w) \wedge (k < n))
 \end{aligned}$$

Quindi resta da verificare la tripla (5.1) per il valore di R appena calcolato. Applicando la Regola dell'Assegnamento, dobbiamo verificare che

$$P \Rightarrow def(k+1) \wedge (k \in [0, n] \wedge (\forall j . j \in [0, k] \Rightarrow a[j] < w) \wedge (sum+k)*2 = k*(k+1) \wedge def((a[k] < w) \wedge (k < n)))^{[k+1/k]}$$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione

$$\begin{aligned}
 & def(k + 1) \wedge k + 1 \in [0, n] \wedge (\forall j . j \in [0, k + 1] \Rightarrow a[j] < w) \wedge (sum + k + 1) * 2 = (k + 1) * (k + 1 + 1) \wedge \\
 & \quad \wedge def((a[k + 1] < w) \wedge (k + 1 < n)) \\
 \equiv & \{definizione di def\} \\
 & k + 1 \in [0, n] \wedge (\forall j . j \in [0, k + 1] \Rightarrow a[j] < w) \wedge (sum + k + 1) * 2 = (k + 1) * (k + 1 + 1) \wedge k + 1 \in dom(a) \\
 \equiv & \{\mathbf{Ip}: (k \in [0, n]) \wedge (k < n) \wedge dom(a) = [0, n]) \} \\
 & (\forall j . j \in [0, k + 1] \Rightarrow a[j] < w) \wedge (sum + k + 1) * 2 = (k + 1) * (k + 1 + 1) \\
 \equiv & \{(\text{Intervallo-}\forall)\} \\
 & (\forall j . j \in [0, k] \Rightarrow a[j] < w) \wedge a[k] < w \wedge (sum + k + 1) * 2 = (k + 1) * (k + 1 + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \{ \mathbf{Ip}: a[k] < w \wedge (\forall j . j \in [0, k] \Rightarrow a[j] < w) \} \\
&\quad (sum + k + 1) * 2 = (k + 1) * (k + 1 + 1) \\
&\equiv \{ \text{calcolo} \} \\
&\quad sum * 2 + 2 * k + 2 = k^2 + 3 * k + 2 \\
&\equiv \{ \mathbf{Ip}: sum * 2 = k * (k + 1) \} \\
&\quad k * (k + 1) + 2 * k + 2 = k^2 + 3 * k + 2 \\
&\equiv \{ \text{calcolo} \} \\
&\quad \mathbf{T}
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 6

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo \mathbf{a} : array $[0, \mathbf{n}]$ of int):

$$\begin{aligned}
&\{ k \in [1, n] \wedge (\forall i . i \in [0, k] \Rightarrow (a[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))) \} \\
&\quad \mathbf{a}[k] := \mathbf{a}[k-1] + k \\
&\{ (\forall i . i \in [0, k] \Rightarrow (a[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))) \}
\end{aligned}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Per dimostrare le tripla applichiamo l' Assioma dell'Aggiornamento Selettivo e la Regola di Inferenza PRE. Quindi ci riduciamo a verificare che

$$\begin{aligned}
&k \in [1, n] \wedge (\forall i . i \in [0, k] \Rightarrow (a[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))) \Rightarrow \\
&\quad def(k) \wedge def(a[k-1] + k) \wedge k \in dom(a) \wedge (\forall i . i \in [0, k] \Rightarrow (b[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x)))
\end{aligned}$$

dove $b = a^{[a[k-1]+k]/k}$.

Partiamo dalla conseguenza

$$\begin{aligned}
&def(k) \wedge def(a[k-1] + k) \wedge k \in dom(a) \wedge (\forall i . i \in [0, k] \Rightarrow (b[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))) \\
&\equiv \{ \text{definizione di def} \} \\
&\quad k-1 \in dom(a) \wedge k \in dom(a) \wedge (\forall i . i \in [0, k] \Rightarrow (b[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))) \\
&\equiv \{ \mathbf{Ip}: k \in [1, n] \wedge dom(a) = [0, n] \} \\
&\quad (\forall i . i \in [0, k] \Rightarrow (b[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))) \\
&\equiv \{ (\text{Intervallo-}\forall) \} \\
&\quad (\forall i . i \in [0, k] \Rightarrow (b[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x)) \wedge b[k] = (\Sigma x : x \in [0, k].x)) \\
&\equiv \{ \text{def di } b, \mathbf{Ip}: (\forall i . i \in [0, k] \Rightarrow (a[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))), (\forall i . i \in [0, k] \Rightarrow i \neq k) \} \\
&\quad b[k] = (\Sigma x : x \in [0, k].x) \\
&\equiv \{ \mathbf{Ip}: \text{def di } b, \text{ sostituzione} \} \\
&\quad a[k-1] + k = (\Sigma x : x \in [0, k].x) \\
&\equiv \{ (\text{Intervallo-}\Sigma) \} \\
&\quad a[k-1] + k = (\Sigma x : x \in [0, k].x) + k \\
&\equiv \{ \mathbf{Ip}: (\forall i . i \in [0, k] \Rightarrow (a[i] = (\Sigma x : x \in [0, i].x))) \} \\
&\quad (\Sigma x : x \in [0, k-1].x) + k = (\Sigma x : x \in [0, k].x) + k \\
&\equiv \{ (\text{Intervallo-}\Sigma) \} \\
&\quad \mathbf{T}
\end{aligned}$$