LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2015-2016
Secondo Appello - 11/02/2016 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

ESERCIZIO 1

Si dica se le seguenti proposizioni sono tautologie oppure no. Se una proposizione è una tautologia, lo si deve dimostrare senza usare le tabelle di verità; altrimenti va prodotto un controesempio mostrando esplicitamente che rende la formula falsa.

1. $(\neg P \Rightarrow R) \wedge (S \vee Q \Rightarrow \neg P) \;\Rightarrow\; (\neg R \wedge \neg Q \Rightarrow \neg S)$
2. $(P \vee \neg R) \wedge (S \vee \neg Q \Rightarrow \neg P) \;\Rightarrow\; (S \Rightarrow \neg R) \wedge (R \Rightarrow \neg Q)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La formula è una tautologia come mostrato di seguito. Consideriamo la premessa e modifichiamola usando (Contropositiva):

$$
\begin{array}{ll}
 & (\neg P \Rightarrow R) \wedge (S \vee Q \Rightarrow \neg P) \\
\equiv & \{(\text{Contropositiva}), (\text{Doppia Negazione}), \text{due volte}\} \\
 & (\neg R \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow \neg(S \vee Q)) \\
\equiv & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\neg R \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow \neg S \wedge \neg Q)
\end{array}
$$

Ora dimostramo la conseguenza $\neg R \wedge \neg Q \;\Rightarrow\; \neg S$ usando i due congiunti della premessa come ipotesi non tautologiche. Cominciamo dalla premessa $\neg R \wedge \neg Q$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg R \wedge \neg Q \\
\Rightarrow & \{\textbf{Ip: } \neg R \Rightarrow P, \text{ occorrenza positiva}\} \\
 & P \wedge \neg Q \\
\Rightarrow & \{\textbf{Ip: } P \Rightarrow \neg S \wedge \neg Q, \text{ occorrenza positiva}\} \\
 & \neg S \wedge \neg Q \wedge \neg Q \\
\Rightarrow & \{(\text{Sempl-}\wedge), \text{ occorrenza positiva}\} \\
 & \neg S
\end{array}
$$

2. La formula non è una tautologia, in quanto l'interpretazione: $\{P \mapsto \mathbf{T}, R \mapsto \mathbf{T}, S \mapsto \mathbf{F}, Q \mapsto \mathbf{T}\}$ la rende falsa. La seguente valutazione (riga della tabella di verità corrispondente all'interpretazione) giustifica la risposta (i numeri indicano l'ordine in cui sono state valutate le sottoformule).:

P	R	S	Q	(P	$\vee$	$\neg$	R)	$\wedge$	(S	$\vee$	$\neg$	Q	$\Rightarrow$	$\neg$	P)	$\Rightarrow$	(S	$\Rightarrow$	$\neg$	R)	$\wedge$	(R	$\Rightarrow$	$\neg$	Q)
T	T	F	T	T	T	F	T	T	F	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F	T	F	F	T
				1	3	2	1	5	1	3	2	1	4	2	1	6	1	3	2	1	4	1	3	2	1

ESERCIZIO 2
Si formalizzi il seguente enunciato usando l'alfabeto con simboli di costante $\mathcal{C} = \{L, P\}$ e simboli di predicato $\mathcal{P} = \{citta(\_), volo(\_), partenza(\_,\_), arrivo(\_,\_)\}$ rispetto all'interpretazione fissata $(\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme di tutte le città e di tutti i voli, e

- $\alpha(L)$ è la città Londra,
- $\alpha(P)$ è la città Parigi,
- $\alpha(citta)(p)$ è vera se e solo se p è una città,
- $\alpha(volo)(p)$ è vera se e solo se p è un volo aereo,
- $\alpha(partenza)(p, q)$ è vera se e solo se il volo p parte dalla città q,
- $\alpha(arrivo)(p, q)$ è vera se e solo se il volo p arriva nella città q.

"Ogni città ha almeno un volo aereo per Parigi o per Londra."

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

$$(\forall x \,.\, citta(x) \Rightarrow (\exists y \,.\, volo(y) \wedge partenza(y, x) \wedge \big(arrivo(y, L) \vee arrivo(y, P)\big)))$$

ESERCIZIO 3
Si provi che la seguente formula è valida (P, Q, R e S contengono la variabile libera x):

$$\big((\forall x \,.\, P \wedge \neg R) \vee \neg(\exists x \,.\, Q \wedge \neg S)\big) \wedge (\exists x \,.\, Q \vee R) \;\Rightarrow\; \neg(\forall x \,.\, \neg P \wedge \neg(S \vee R))$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3
Applichiamo (De Morgan) nella formula per portare le negazioni all'interno:

$$\begin{array}{ll}
 & \big((\forall x \,.\, P \wedge \neg R) \vee \neg(\exists x \,.\, Q \wedge \neg S)\big) \wedge (\exists x \,.\, Q \vee R) \;\Rightarrow\; \neg(\forall x \,.\, \neg P \wedge \neg(S \vee R)) \\
\equiv & \{\text{(De Morgan), (Doppia Negazione), più volte}\} \\
 & \big((\forall x \,.\, P \wedge \neg R) \vee (\forall x \,.\, \neg Q \vee S)\big) \wedge (\exists x \,.\, Q \vee R) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, P \vee S \vee R)
\end{array}$$

Per il Principio di Skolemizzazione, è sufficiente dimostrare la seguente implicazione, dove $\mathbf{d}$ è una nuova costante:

$$\big((\forall x \,.\, P \wedge \neg R) \vee (\forall x \,.\, \neg Q \vee S)\big) \wedge (\exists x \,.\, Q \vee R) \wedge (Q[^{\mathbf{d}}/_x] \vee R[^{\mathbf{d}}/_x]) \;\Rightarrow\; (\exists x \,.\, P \vee S \vee R)$$

Partiamo dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & \big((\forall x \,.\, P \wedge \neg R) \vee (\forall x \,.\, \neg Q \vee S)\big) \wedge \underline{(\exists x \,.\, Q \vee R) \wedge (Q[^{\mathbf{d}}/_x] \vee R[^{\mathbf{d}}/_x])} \\
\Rightarrow & \{\text{(semp-}\wedge\text{), occorrenza positiva}\} \\
 & \underline{\big((\forall x \,.\, P \wedge \neg R) \vee (\forall x \,.\, \neg Q \vee S)\big)} \wedge (Q[^{\mathbf{d}}/_x] \vee R[^{\mathbf{d}}/_x]) \\
\Rightarrow & \{(\forall : \vee)\text{, occorrenza positiva}\} \\
 & \underline{\big(\forall x \,.\, (P \wedge \neg R) \vee \neg Q \vee S\big)} \wedge (Q[^{\mathbf{d}}/_x] \vee R[^{\mathbf{d}}/_x]) \\
\Rightarrow & \{\text{(elim-}\forall\text{), occorrenza positiva}\} \\
 & \underline{\big((P[^{\mathbf{d}}/_x] \wedge \neg R[^{\mathbf{d}}/_x]) \vee \neg Q[^{\mathbf{d}}/_x] \vee S[^{\mathbf{d}}/_x]\big) \wedge (Q[^{\mathbf{d}}/_x] \vee R[^{\mathbf{d}}/_x])} \\
\Rightarrow & \{\text{(Risoluzione)}\} \\
 & \underline{(P[^{\mathbf{d}}/_x] \wedge \neg R[^{\mathbf{d}}/_x])} \vee S[^{\mathbf{d}}/_x] \vee R[^{\mathbf{d}}/_x] \\
\Rightarrow & \{\text{(sempl-}\wedge\text{), occorrenza positiva}\} \\
 & \underline{P[^{\mathbf{d}}/_x] \vee S[^{\mathbf{d}}/_x] \vee R[^{\mathbf{d}}/_x]} \\
\Rightarrow & \{\text{(intro-}\exists\text{)}\} \\
 & (\exists x \,.\, P \vee S \vee R)
\end{array}$$

ESERCIZIO 4
Si formalizzi il seguente enunciato (assumendo **a, b: array [0, n) of int**):

"Il numero degli elementi pari dell'array **b** è maggiore del numero degli elementi dispari dell'array **a** solo se il minimo dell'array **a** è pari."

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

$$\big(\#\{i : i \in [0, y+1) \mid pari(b[i])\} > \#\{i : i \in [0, n) \mid dispari(a[i])\}\big) \Rightarrow pari((\mathbf{min}\ i : \ i \in [0, n) \,.\, a[i]))$$

ESERCIZIO 5

Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a,b: array [0, n) of int**):

$\{h \in (0, n) \ \wedge \ \big(\forall i \,.\, i \in [0, h) \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, b[y])\big)\}$

```
    a[h] := b[h] + a[h-1];
    h := h + 1
```

$\{\big(\forall i \,.\, i \in [0, h) \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, b[y])\big)\}$

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

Chiamiamo Q la postcondizione:

$$\big(\forall i \,.\, i \in [0, h) \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, b[y])\big)$$

Per dimostrare la tripla data applichiamo la regola di inferenza della Sequenza riducendoci a dimostrare che

(5.1) $\{h \in (0, n) \wedge Q\}$ `a[h] := b[h] + a[h-1]` $\{R\}$

(5.2) $\{R\ \}$ `h:=h+1` $\{Q\}$

Partiamo quindi dalla (5.2) per determinare R. Applicando l'assioma dell'assegamento (ASS) otteniamo:

$$
\begin{array}{ll}
 & def(h+1) \wedge \big(\forall i \,.\, i \in [0, h) \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, b[y])\big)[^{h+1}/_h] \\
\equiv & \{\text{definizione di } def \text{ e sostituzione}\} \\
 & \big(\forall i \,.\, i \in [0, h+1) \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, b[y])\big)
\end{array}
$$

Quindi R è la seguente asserzione:

$$\big(\forall i \,.\, i \in [0, h+1) \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, b[y])\big)$$

Per dimostrare la (5.1) applichiamo l'Assioma dell'Aggiornamento Selettivo, e la regola (PRE). Di conseguenza ci riduciamo a verificare che:

$$h \in (0, n) \wedge Q \ \Rightarrow \ def(h) \wedge h \in dom(a) \wedge def(b[h] + a[h-1]) \wedge R[^{a'}/_a] \qquad \text{dove} \qquad a' = a\left[^{b[h]+a[h-1]}/_h\right]$$

Partiamo dalla conseguenza

$$
\begin{array}{ll}
 & def(h) \wedge h \in dom(a) \wedge def(b[h] + a[h-1]) \wedge R[^{a'}/_a] \\
\equiv & \{\text{definizione di } def\} \\
 & h \in dom(a) \wedge h \in dom(b) \wedge h-1 \in dom(a) \wedge R[^{a'}/_a] \\
\equiv & \{\mathbf{Ip}\text{: } h \in (0, n) \wedge dom(b) = dom(a) = [0, n), \text{ sostituzione}\} \\
 & \big(\forall i \,.\, i \in [0, h+1) \Rightarrow a'[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, b[y])\big) \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\forall),\ (0, h] \text{ non vuoto (infatti per ipotesi } h \in (0, n), \text{ quindi } h > 0)\ \} \\
 & \big(\forall i \,.\, i \in [0, h) \Rightarrow a'[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, b[y])\big) \ \wedge \ a'[h] = (\Sigma y : y \in [0, h] \,.\, b[y]) \\
\equiv & \{\text{per def di } a'\text{: } a'[i] = a[i] \text{ per ogni } i \in [0, h) \text{ e } a'[h] = b[h] + a[h-1]\} \\
 & \big(\forall i \,.\, i \in [0, h) \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, b[y])\big) \ \wedge \ b[h] + a[h-1] = (\Sigma y : y \in [0, h] \,.\, b[y]) \\
\equiv & \big\{\mathbf{Ip:}\ \big(\forall i \,.\, i \in [0, h) \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, b[y])\big)\big\} \\
 & b[h] + a[h-1] = (\Sigma y : y \in [0, h] \,.\, b[y]) \\
\equiv & \{(\text{Intervallo-}\Sigma)\} \\
 & b[h] + a[h-1] = (\Sigma y : y \in [0, h-1] \,.\, b[y]) + b[h] \\
\equiv & \big\{\mathbf{Ip:}\ \big(\forall i \,.\, i \in [0, h) \Rightarrow a[i] = (\Sigma y : y \in [0, i] \,.\, b[y])\big),\ h-1 \in [0, h), \text{ calcolo}\big\} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$

ESERCIZIO 6

Si consideri il seguente programma annotato (assumendo **a, c: array [0, m) of int**):

$\{ \; m > 0 \; \}$

```
y:= 0; h := 0;
```

$\{\mathsf{Inv} : \; y \in [0, m] \;\wedge\; h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\}\}\{\text{t: } m - y\}$

```
while (y < m) do
     if (a[y] = c[y])
          then h := h + 1
          else skip fi;
     y := y + 1
endw
```

$\{h = \#\{i : i \in [0, m) \mid a[i] = c[i]\}\}$

Scrivere e dimostrare l'ipotesi di invarianza.

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

Invariante $Inv : y \in [0, m] \;\wedge\; h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\}$
Funzione di terminazione $t : m - y$
Condizione $E : y < m$
Comando C : `if` $(a[y] = c[y])$ `then h := h + 1 else skip fi; y := y + 1`

L' *Ipotesi di Invarianza* ($\{Inv \wedge E\}\ C\ \{Inv \wedge def(E)\}$) in questo caso è

$\{y \in [0, m] \;\wedge\; h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m)\}$
`if` $(a[y] = c[y])$ `then h := h + 1 else skip fi; y := y + 1`
$\{y \in [0, m] \;\wedge\; h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\} \;\wedge\; def(y < m)\}$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare una asserzione R tale che le seguenti triple siano verificate:

(6.1) $\{y \in [0, m] \;\wedge\; h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m)\}$ `if` $(a[y] = c[y])$ `then h := h + 1 else skip fi` $\{R\}$

(6.2) $\{R\}$ $\mathtt{y := y + 1}$ $\{y \in [0, m] \;\wedge\; h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\} \;\wedge\; def(y < m)\}$

Per determinare R, usiamo l'Assioma dell'Assegnamento in (6.2) e troviamo

$$
\begin{array}{ll}
 & def(y + 1) \wedge \big(Inv \;\wedge\; def(y < m)\big)[^{y+1}/_y] \\
\equiv & \{\text{sostituzione, definizione di } def\text{, calcolo}\} \\
 & y + 1 \in [0, m] \;\wedge\; h = \#\{i : i \in [0, y + 1) \mid a[i] = c[i]\} \;\wedge\; def(y + 1 < m)
\end{array}
$$

Quindi resta da verificare la tripla (6.1) per il valore di R appena calcolato. Applicando la regola del Condizionale, dobbiamo verificare che

(6.2.1) $y \in [0, m] \;\wedge\; h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m) \Rightarrow def(a[y] = c[y])$

(6.2.2) $\{y \in [0, m] \;\wedge\; h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m) \wedge a[y] = c[y]\;\}$ `h:=h+1` $\{R\}$

(6.2.3) $\{y \in [0, m] \;\wedge\; h = \#\{i : i \in [0, y) \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m) \wedge \neg(a[y] = c[y])\;\}$ `skip` $\{R\}$

Per dimostrare (6.2.1) partiamo dalla conseguenza

$$
\begin{array}{ll}
 & def(a[y] = c[y]) \\
\equiv & \{\text{definizione di def}\} \\
 & y \in dom(a) \wedge y \in dom(b) \\
\equiv & \{\textbf{Ip}\text{: } y \in [0, m] \;\wedge\; y < m \;\wedge\; dom(a) = dom(b) = [0, m)\} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$

Per dimostrare la (6.2.2) applichiamo la regola dell Assegnamento e ci riduciamo a verificare che

$$y \in [0,m] \ \wedge \ h = \#\{i : i \in [0,y) \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m) \wedge a[y] = c[y] \ \Rightarrow$$
$$def(h+1) \wedge \big(y+1 \in [0,m] \ \wedge \ h = \#\{i : i \in [0,y+1) \mid a[i] = c[i]\} \ \wedge \ def(y+1 < m)\big)[^{h+1}/_h]$$

Partiamo dalla conseguenza

$def(h+1) \wedge \big(y+1 \in [0,m] \ \wedge \ h = \#\{i : i \in [0,y+1) \mid a[i] = c[i]\} \ \wedge \ def(y+1 < m)\big)[^{h+1}/_h]$

$\equiv$ {definizione di *def*, sostituzione}

$y+1 \in [0,m] \ \wedge \ h+1 = \#\{i : i \in [0,y+1) \mid a[i] = c[i]\}$

$\equiv$ {**Ip**: $y \in [0,m] \ \wedge \ y < m$}

$h+1 = \#\{i : i \in [0,y+1) \mid a[i] = c[i]\}$

$\equiv$ {(Intervallo-#), **Ip**: $a[y] = c[y]$ }

$h+1 = \#\{i : i \in [0,y) \mid a[i] = c[i]\} + 1$

$\equiv$ {**Ip:** $h = \#\{i : i \in [0,y) \mid a[i] = c[i]\}$, calcolo}

T

Per dimostrare la (6.2.3), per la regola (SKIP) è sufficiente dimostrare:

$$y \in [0,m] \ \wedge \ h = \#\{i : i \in [0,y) \mid a[i] = c[i]\} \wedge (y < m) \wedge \neg(a[y] = c[y]) \ \Rightarrow \ R$$

Partiamo dalla conseguenza

$y+1 \in [0,m] \ \wedge \ h = \#\{i : i \in [0,y+1) \mid a[i] = c[i]\} \ \wedge \ def(y+1 < m)$

$\equiv$ {definizione di *def*}

$y+1 \in [0,m] \ \wedge \ h = \#\{i : i \in [0,y+1) \mid a[i] = c[i]\}$

$\equiv$ {**Ip**: $y \in [0,m] \ \wedge \ y < m$}

$h = \#\{i : i \in [0,y+1) \mid a[i] = c[i]\}$

$\equiv$ {(Intervallo-#), **Ip**: $\neg(a[y] = c[y])$ }

$h = \#\{i : i \in [0,y) \mid a[i] = c[i]\}$

$\equiv$ {**Ip:** $h = \#\{i : i \in [0,y) \mid a[i] = c[i]\}$}

T