LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE - a.a. 2015-2016
Prima prova di verifica intermedia - 5/11/2015

Attenzione: si scrivano **nome**, **cognome**, **matricola** e **corso IN ALTO A DESTRA** su ogni foglio che si consegna.

ESERCIZIO 1
Per ognuna delle seguenti formule si dica se si tratta di una tautologia oppure no. Se è una tautologia si fornisca una dimostrazione (non per casi) altrimenti si fornisca un controesempio.

1. $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg(P \Rightarrow \neg Q) \vee (Q \vee \neg R)) \;\Rightarrow\; (R \Rightarrow P)$
2. $P \wedge R \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg S \wedge R) \;\equiv\; R \wedge S \Rightarrow (P \Rightarrow \neg Q)$
3. $\neg((\neg Q \vee P) \wedge R) \wedge (P \vee Q \Rightarrow R) \;\Rightarrow\; (Q \Rightarrow \neg P)$

ESERCIZIO 2
Utilizzando il principio di sostituzione dell'implicazione, si applichi l'ipotesi non tautologica $\neg P \vee \neg R \Rightarrow \neg Q$ alle seguenti formule, completando in entrambi i casi un singolo passo di dimostrazione con la relativa giustificazione.

1. $\neg(\neg P \vee \neg R) \wedge S \Rightarrow S \wedge \neg R$
2. $(P \;\Rightarrow\; \neg R) \wedge \neg S \Rightarrow \neg(\neg P \vee \neg R)$

ESERCIZIO 3
Si formalizzi il seguente enunciato utilizzando l'alfabeto del primo ordine e l'interpretazione sul dominio dei naturali che sono proposti, senza introdurre ulteriori simboli:

"La somma di due numeri è pari solo se sono entrambi pari o entrambi dispari"

- **Alfabeto**: $C = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{+(\_,\_)\}$, $\mathcal{P} = \{pari(\_)\}$,
- **Interpretazione**: $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, con
  - $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, con $\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali.
  - $\alpha(+)(n, m) = k$ se e solo se k è la somma di n e m.
  - $\alpha(pari)(n) = \mathbf{T}$ se e solo se n è pari.

ESERCIZIO 4
Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall x\,.\,(\exists y\,.\,Q(x,y) \;\Rightarrow\; \neg P(x)))$$

nell'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$ ed α è definita come segue

$$\alpha(P)(z) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } z \in \{1,2\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(Q)(z,v) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } (z,v) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,1)\} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli cioè $\mathcal{I}_\rho(\Phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ è un assegnamento arbitrario.