LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2015/16
Esercizi sulla Logica del Primo Ordine

ESERCIZIO 1
Dimostrare che le seguenti formule (*leggi del dominio*) sono valide:

1. $(\forall x.\ P(x) \vee Q(x) \ \Rightarrow\ R(x)) \equiv (\forall x.\ P(x) \ \Rightarrow\ R(x)) \wedge (\forall x.\ Q(x) \ \Rightarrow\ R(x))$
2. $(\exists x.\ (P(x) \vee Q(x)) \wedge R(x)) \equiv (\exists x.\ P(x) \wedge R(x)) \vee (\exists x.\ Q(x) \wedge R(x))$

ESERCIZIO 2
Mostrare che le seguenti formule *non* sono valide (giustificando la risposta con un controesempio):

1. $(\forall x.\ (\exists y.\ P(x,y))) \equiv (\exists y.\ (\forall x.\ P(x,y)))$
2. $(\exists x.\ P(x)) \wedge (\exists x.\ Q(x)) \ \Rightarrow\ (\exists x.\ P(x) \wedge Q(x))$
3. $(\forall x.\ P(x) \vee\ Q(x)) \ \Rightarrow\ (\forall x.\ P(x)) \vee (\forall x.\ Q(x))$

Suggerimento: trovare una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ che rende la formula falsa.

ESERCIZIO 3
Dimostrare che le seguenti formule sono valide:

1. $(\forall x.\neg P(x) \ \Rightarrow\ R(x)) \wedge \neg(P(a) \vee Q(a)) \ \Rightarrow\ \neg(\forall x.\neg R(x) \vee Q(x))$
2. $(\exists x.\ \neg P(x)) \vee (\exists x.\ P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\exists x.\ P(x) \ \Rightarrow\ Q(x))$
3. $(\exists x.\ R(x) \wedge Q(x)) \wedge ((\forall x.P(x)) \vee (\forall x.\neg R(x))) \Rightarrow (\exists x.\ R(x)) \wedge (\exists x.P(x))$
   Suggerimento: usare la regola di inferenza della *Skolemizzazione*.