LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2014/15
Seconda esercitazione — 21/10/2014

1. Come compaiono P e $P \Rightarrow Q$ nelle seguenti proposizioni? Positivamente o negativamente?

   (a) $\neg P \Rightarrow R$

   (b) $\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \wedge R) \Rightarrow S)$

   (c) $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$

   (d) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \wedge \neg(P \Rightarrow Q)$

   (e) $(\neg P \vee Q) \wedge \neg(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow S) \Rightarrow (R \vee S)$

   (f) $(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R \Rightarrow Q \wedge S)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

(a) $\neg P \Rightarrow R$

Esiste una sola occorrenza di P che occorre positivamente, come si può vedere dalla tabella di seguito, dove in ogni riga diamo segno - alle sottoformule p che occorrono negativamente, ovvero compaiono nei contesti: $\neg p$ e $p \Rightarrow q$ e segno $+$ dove occorrono positivamente. Contando le occorrenze ad esempio di P vediamo che sono due (pari) i contesti che danno segno negativo, portandoci a concludere che l'occorrenza è positiva.

(	(	¬	**P**	)	⇒	**R**	)	)
			+			+		
		−	−			+		
	−	−	−	−				
			+			+		

Più sinteticamente, possiamo visualizzare i livelli di annidamento, sottolineandoli, come illustrato di seguito:

$$(\underline{(\neg \underline{P})} \Rightarrow R)$$

Possiamo infine controllare se l'occorrenza è positiva, provando a eliminare l'implicazione. Infatti $\neg P \Rightarrow R \equiv \neg\neg P \vee R \equiv P \vee Q$

(b) $\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \wedge R) \Rightarrow S)$

$\underline{(\underline{\neg(\underline{P} \Rightarrow Q)})} \Rightarrow ((Q \wedge R) \Rightarrow S)$

Possiamo vedere che l'unica occorrenza di P è negativa.

(	¬	(	**P**	⇒	**Q**	)	)	⇒	(	(	**Q**	∧	**R**	)	⇒	**S**	)
			−		+						−	−	−			+	
	−	−	−	−	−	−											
−	−	−	−	−	−	−	−		+	+	+	+	+	+	+	+	+
			−		+						−		−			+	

$\underline{(\underline{\neg \boxed{(P \Rightarrow Q)}})} \Rightarrow ((Q \wedge R) \Rightarrow S)$

Possiamo vedere che l'unica occorrenza di $(P \Rightarrow Q)$ è positiva.

(	¬	(	**P**	⇒	**Q**	)	)	⇒	(	(	**Q**	∧	**R**	)	⇒	**S**	)
											−	−	−			+	
	−	−	−	−	−	−											
−	−	−	−	−	−	−	−		+	+	+	+	+	+	+	+	+
		+	+	+	+	+					−		−			+	

Infatti $\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \wedge R) \Rightarrow S) \equiv (P \Rightarrow Q) \vee ((Q \wedge R) \Rightarrow S) \equiv$
$(\neg P \vee Q) \vee (\neg Q \vee \neg R) \vee S)$

(c) $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$: AMBIGUA!

(d) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \wedge \neg(P \Rightarrow Q)$

$(\underline{(P \vee Q)} \Rightarrow R) \wedge \underline{\neg(\underline{P} \Rightarrow Q)}$

Infatti $((P \vee Q) \Rightarrow R) \wedge \neg(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge P \wedge \neg Q)$

(e) $\underline{(\underline{\neg P} \vee Q) \wedge \underline{\neg(\underline{P} \Rightarrow Q)} \wedge (Q \Rightarrow S)} \Rightarrow (R \vee S)$

La prima occorrenza di P occorre positivamente, mentre la seconda negativamente. L'occorrenza di $P \Rightarrow Q$ occorre invece positivamente.

(f) $\underline{(\underline{P} \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S)} \Rightarrow (\underline{P \wedge R} \Rightarrow Q \wedge S)$

La prima occorrenza di P occorre positivamente, mentre la seconda negativamente. L'occorrenza di $P \Rightarrow Q$ occorre invece negativamente.

2. Nei seguenti passi di dimostrazione, indicare il connettivo logico corretto da sostituire a ⍰ applicando il Principio di Sostituzione dell'Implicazione. Motivare la risposta.

(a) $P \Rightarrow \neg(Q \wedge (R \Rightarrow S))$

⍰ $\{$(Semplificazione-$\wedge$)$\}$

$P \Rightarrow \neg Q$

(b) $(P \vee Q) \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$

⍰ $\{$(Introduzione-$\vee$)$\}$

$P \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

(a) Si può adoperare la legge (Semplificazione-$\wedge$): $a \wedge b \Rightarrow a$, applicandola alla sotto-formula $(Q \wedge (R \Rightarrow S))$, che occorre negativamente in $P \Rightarrow \underline{\neg(Q \wedge (R \Rightarrow S))}$. Di conseguenza, possiamo applicare il principio di sostituzione nella versione: se $P \Rightarrow Q$ e P occorre negativamente in R allora $R \Leftarrow R[Q/P]$.

Formalmente:

$P \Rightarrow \underline{\neg(Q \wedge (R \Rightarrow S))}$

$\Leftarrow$ $\Big\{$(Semplificazione-$\wedge$, $(Q \wedge (R \Rightarrow S))$ occorre negativamente in $P \Rightarrow \underline{\neg(Q \wedge (R \Rightarrow S))}\Big\}$

$P \Rightarrow \neg Q$

(b) Per adoperare la legge (Introduzione-$\vee$): $a \Rightarrow a \vee b$, posso partire dalla seconda formula $\underline{P \wedge R} \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$, applicandola a P, che nella formula occorre negativamente.

$(P \vee Q) \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$

$\Rightarrow$ $\{$(introduzione-$\vee$) e P occorre negativamente in $\underline{P \wedge R} \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\}$

$P \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$

L'applicazione del Principio di Sostituzione nel caso di occorrenza negativa, si vede più chiaramente invertendo l'ordine delle due formule, e ricordando che $a \Rightarrow b \equiv b \Leftarrow a$:

$$
\begin{array}{ll}
 & P \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q) \\
\Leftarrow & \{(\text{Introduzione-}\vee) \text{ e } P \text{ occorre negativamente in } \underline{P \wedge R} \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\} \\
 & (P \vee Q) \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)
\end{array}
$$

Alternativamente

$$
\begin{array}{ll}
 & (P \vee Q) \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q) \\
\Rightarrow & \left\{(\text{Introduzione-}\vee \text{ al contrario}) \text{ e } P \vee Q \text{ occorre neg. in } \underline{(P \vee Q) \wedge R} \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\right\} \\
 & P \wedge R \Rightarrow (R \Rightarrow Q)
\end{array}
$$

3. Applicare la legge *Modus Ponens* alla sottoformula sottolineata della seguente formula, e scrivere per esteso la formula risultante, la giustificazione e il connettivo.

   $R \wedge \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg P \Rightarrow R)} \Rightarrow P \wedge R$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Ricordiamo che il Modus Ponens prescrive che $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

$$
\begin{array}{lll}
 & R \wedge \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg P \Rightarrow R)} \Rightarrow P \wedge R & \\
\equiv & & \{(\text{Comm.})\} \\
 & R \wedge \underline{(\neg P \vee Q \Rightarrow R) \wedge (\neg P \vee Q)} \Rightarrow P \wedge R & \\
\Leftarrow & & \{(\text{Modus Ponens}), \underline{(\neg P \vee Q \Rightarrow R) \wedge (\neg P \vee Q)} \text{ occ. -}\} \\
 & R \wedge R \Rightarrow P \wedge R & \\
\equiv & & \{(\text{Idemp.})\} \\
 & R \Rightarrow P \wedge R &
\end{array}
$$

Ciò che si ottiene non va ulteriormente ridotto e, tra parentesi, non è una tautologia.

4. Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, usando dimostrazioni per sostituzione con ipotesi non tautologiche.

   (a) $(P \Rightarrow R \vee S) \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$

   (b) $(P \vee Q \Rightarrow R \wedge S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$

   (c) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

(a) $(P \Rightarrow R \vee S) \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$

Dimostriamo che la formula $(P \Rightarrow S)$ è vera, usando le due ipotesi $(P \Rightarrow R \vee S)$ e $(R \Rightarrow S)$ come giustificazioni.

$$
\begin{array}{ll}
 & P \\
\Rightarrow & \{\ \textbf{Ip:}\ (P \Rightarrow R \vee S)\} \\
 & R \vee S \\
\Rightarrow & \{\ \textbf{Ip:}\ (R \Rightarrow S\} \\
 & S \vee S \\
\equiv & \{(\text{Unità})\} \\
 & S
\end{array}
$$

Notare che quando si applica il principio di sostituzione ad un'intera formula non serve specificare il tipo di occorrenza.

(b) $(P \vee Q \Rightarrow R \wedge S) \Rightarrow (P \Rightarrow S) \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge S) \Rightarrow (\neg P \vee S)$
Dimostriamo che la formula $(P \Rightarrow S)$ è vera, usando l'ipotesi $(P \vee Q \Rightarrow R \wedge S)$ come giustificazione. Nota che per poter dimostrare $P \Rightarrow S$, utilizzando le ipotesi, devo introdurre $P \vee Q$.

$$
\begin{array}{ll}
 & P \\
\Rightarrow & \{(\text{Introduzione-}\vee),\ P \text{ occorre posit.}\} \\
 & P \vee Q \\
\Rightarrow & \{\ \textbf{Ip:}\ P \vee Q \Rightarrow R \wedge S\} \\
 & R \wedge S \\
\Rightarrow & \{(\text{Semplificazione-}\wedge,\ R \text{ occorre posit.})\} \\
 & S
\end{array}
$$

In alternativa, possiamo procedere per casi:

- P vero, cioè, $P = \mathbf{T}$
  La formula da dimostrare diventa

$$
\begin{array}{ll}
 & (P \Rightarrow S) \\
\equiv & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
 & (\neg P \vee S) \\
\equiv & \{\ \textbf{Ip:}\ P\} \\
 & (\neg \mathbf{T} \vee S) \\
\equiv & \{(\text{Unità})\} \\
 & S
\end{array}
$$

  L'ipotesi di partenza diventa

$$
\begin{array}{ll}
 & (P \vee Q \Rightarrow R \wedge S) \\
\equiv & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
 & (\neg P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge S) \\
\equiv & \{\ \textbf{Ip:}\ P\} \\
 & (\neg \mathbf{T} \wedge \neg Q) \vee (R \wedge S) \\
\equiv & \{(\text{Zero})\} \\
 & (R \wedge S)
\end{array}
$$

  È facile vedere che, grazie alla legge di Semplificazione, $(R \wedge S) \Rightarrow S$.
- P falso, cioè $P = \mathbf{F}$

La formula da dimostrare diventa

$$
\begin{array}{ll}
& (P \Rightarrow S) \\
\equiv & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
& (\neg P \vee S) \\
\equiv & \{\ \textbf{Ip: } \neg P\} \\
& (\neg \mathbf{F} \vee S) \\
\equiv & \{(\text{T:F})\} \\
& (\mathbf{T} \vee S) \\
\equiv & \{(\text{Zero})\} \\
& \mathbf{T}
\end{array}
$$

L'ipotesi di partenza diventa

$$
\begin{array}{ll}
& (P \vee Q \Rightarrow R \wedge S) \\
\equiv & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
& (\neg P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge S) \\
\equiv & \{\ \textbf{Ip: } \neg P\} \\
& (\neg \mathbf{F} \wedge \neg Q) \vee (R \wedge S) \\
\equiv & \{(\text{T:F})\} \\
& (\mathbf{T} \wedge \neg Q) \vee (R \wedge S) \\
\equiv & \{(\text{Unità})\} \\
& \neg Q \vee (R \wedge S)
\end{array}
$$

Otteniamo quindi $\neg Q \vee (R \wedge S) \Rightarrow \mathbf{T} \equiv \neg(\neg Q \vee (R \wedge S)) \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$.

(c) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$ Anche in questo caso, per dimostrare la conclusione $((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$, usiamo la premessa $(P \Rightarrow Q)$ come giustificazione.

Si può procedere in vari modi, che illustriamo di seguito:

- Possiamo applicare la legge contronominale $(P \Rightarrow Q) \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$.
  Per dimostrare la conclusione, proviamo quindi a derivare $(P \Rightarrow R)$ da $(Q \Rightarrow R)$, usando l'ipotesi $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

$$
\begin{array}{ll}
& (Q \Rightarrow R) \\
\equiv & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
& (\neg Q \vee R) \\
\Rightarrow & \{\ (\textbf{Ip: } \neg Q \Rightarrow \neg P)\textbf{, } \neg Q \textbf{ occorre posit.}\} \\
& (\neg P \vee R) \\
\equiv & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
& P \Rightarrow R
\end{array}
$$

- Possiamo invece usare direttamente l'ipotesi $P \Rightarrow Q$, facendo però attenzione a come si applica il Principio di Sostituzione.

$$
\begin{array}{ll}
& Q \Rightarrow R \\
\Rightarrow & \{\ \textbf{Ip: } (Q \Leftarrow P)\textbf{, } Q \textbf{ occ. neg}\} \\
& P \Rightarrow R
\end{array}
$$

  Notare che abbiamo usato il fatto che $(P \Rightarrow Q) \equiv (Q \Leftarrow P)$

- Possiamo anche utilizzare la Legge di Sempl.-Sinistra-2: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$:

$$
\begin{array}{ll}
& (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)) \\
\equiv & \{\ (\text{Sempl.-Sinistra-2})\} \\
& (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)
\end{array}
$$

  A questo punto, possiamo

– usare anche l'ipotesi $(Q \Rightarrow R)$ e provare a dimostrare che $(P \Rightarrow R)$

$$\begin{array}{lll} & P & \\ \Rightarrow & & \{\ \textbf{Ip:}\ (P \Rightarrow Q)\} \\ & Q & \\ \Rightarrow & & \{\ \textbf{Ip:}\ (Q \Rightarrow R)\} \\ & R & \end{array}$$

– oppure possiamo partire dalle premesse e provare a derivare la conclusione:

$$\begin{array}{lll} & (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) & \\ \Rightarrow & & \{\ (\text{Trans.}\ \Rightarrow)\} \\ & (P \Rightarrow R) & \end{array}$$

5. Si provi che le seguenti proposizioni sono tautologie, senza usare le tabelle di verità. Per ogni tautologia cercare di trovare la tecnica di dimostrazione più adeguata.

   (a) $(P \wedge Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee R)$

   (b) $((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg R \vee S) \Rightarrow (R \wedge \neg S \Rightarrow \neg P)$

   (c) $\neg P \wedge (R \Rightarrow \neg(P \Rightarrow Q)) \quad \Rightarrow \quad \neg R$

SOLUZIONE ESERCIZIO 5

(a) $(P \wedge Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee R)$ Proviamo a derivare la conclusione $(P \vee R)$, a partire dalla premessa $(P \wedge Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow R)$

$$\begin{array}{lll} & (P \wedge Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow R) & \\ \equiv & & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow), (\text{Doppia Neg.})\} \\ & P \wedge Q \wedge (Q \vee R) & \\ \equiv & & \{(\text{Assorb.})\} \\ & (P \wedge Q) & \\ \Rightarrow & & \{(\text{Sempl.-}\wedge)\} \\ & P & \\ \Rightarrow & & \{(\text{Intro.-}\vee)\} \\ & P \vee R & \end{array}$$

(b) $((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg R \vee S) \Rightarrow (R \wedge \neg S \Rightarrow \neg P)$
Proviamo a derivare la conclusione $(R \wedge \neg S \Rightarrow \neg P)$, a partire dalla premessa $((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg R \vee S)$.

$$\begin{array}{lll} & ((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg R \vee S) & \\ \equiv & & \{(\text{Contronom.})\} \\ & \neg(\neg R \vee S) \Rightarrow \neg(\neg P \Rightarrow Q) & \\ \equiv & & \{(\text{De Morgan})\text{ e }(\text{Doppia Neg.})\} \\ & R \wedge \neg S \Rightarrow \neg(\neg P \Rightarrow Q) & \\ \equiv & & \{\neg \Rightarrow\} \\ & R \wedge \neg S \Rightarrow P \wedge \neg Q & \\ \Rightarrow & & \{(\text{Sempl.-}\wedge),\ P \wedge \neg Q \text{ occorre posit.}\} \\ & R \wedge \neg S \Rightarrow \ P & \end{array}$$

Notare l'uso della Legge Contronominale per riportare la premessa in una forma sfruttabile per derivare la conclusione.

(c) $\neg P \wedge (R \Rightarrow \neg(P \Rightarrow Q)) \quad \Rightarrow \quad \neg R$

Procediamo per casi:

- $P = \mathbf{T}$

$$\begin{array}{ll} & \neg\mathbf{P} \wedge (R \Rightarrow \neg(P \Rightarrow Q)) \\ \equiv & \qquad\qquad\qquad\qquad \{(\textbf{Ip: P})\} \\ & \mathbf{F} \end{array}$$

Questo rende vera la formula $\neg R$, qualsiasi sia il valore di R.

- $P = \mathbf{F}$

$$\begin{array}{lll} & \neg P \wedge (R \Rightarrow \neg(P \Rightarrow Q)) & \\ \equiv & & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\ & \neg P \wedge (\neg R \vee (P \wedge \neg Q)) & \\ \equiv & & \{(\textbf{Ip: } P)\} \\ & \neg\mathbf{F} \wedge (\neg R \vee (\mathbf{F} \wedge \neg Q)) & \\ \equiv & & \{(\text{T:F}), (\text{Zero})\} \\ & \mathbf{T} \wedge (\neg R \vee \mathbf{F}) & \\ \equiv & & \{(\text{Unità})\} \\ & \neg R & \end{array}$$

6. Si dica se la seguente proposizione è una tautologia oppure no, motivando la risposta:

$$(Q \Rightarrow R) \wedge (\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow P \wedge R)$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 6

La proposizione non può essere una tautologia, dato che è possibile individuare valori delle variabili proposizionali che la rendono falsa. Otteniamo infatti **F**, prendendo infatti l'interpretazione:

$$\{P \mapsto \mathbf{T}, Q \mapsto \mathbf{F}, R \mapsto \mathbf{F}\}$$

7. Usando come ipotesi $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ e $R \Rightarrow S$, dimostrare per casi su Q che vale $(P \Rightarrow \neg Q \vee S)$

SOLUZIONE ESERCIZIO 7

- Caso $Q = \mathbf{T}$. La formula da dimostrare si riduce come mostrato di seguito.

$$\begin{array}{lll} & (P \Rightarrow \neg\mathbf{Q} \vee S)) & \\ \equiv & & \{\textbf{ Ip: Q}\} \\ & (P \Rightarrow \neg\mathbf{T} \vee S)) & \\ \equiv & & \{(\text{T:F}), (\text{Unità})\} \\ & (P \Rightarrow S) & \end{array}$$

Mentre la prima ipotesi si riduce così:

$$\begin{array}{lll} & P \wedge \mathbf{Q} \Rightarrow R & \\ \equiv & & \{\textbf{ Ip: Q}\} \\ & P \wedge \mathbf{T} \Rightarrow R & \\ \equiv & & \{(\text{Unità})\} \\ & (P \Rightarrow R) & \end{array}$$

Ci rimane da dimostrare $P \Rightarrow S$, usando come ipotesi $(P \Rightarrow R)$ e $(R \Rightarrow S)$, nel modo seguente:

$$\begin{array}{ll} & P \\ \Rightarrow & \qquad \{\textbf{ Ip: } P \Rightarrow R\} \\ & R \\ \Rightarrow & \qquad \{\textbf{ Ip: } R \Rightarrow S\} \\ & S \end{array}$$

- Caso $Q = \mathbf{F}$. La formula da dimostrare si riduce come mostrato di seguito.

$$\begin{array}{lll} & P \Rightarrow \neg\mathbf{Q} \vee S & \\ \equiv & & \{\textbf{ Ip: } \neg\mathbf{Q}\} \\ & P \Rightarrow \mathbf{T} \vee S & \\ \equiv & & \{(\text{Zero})\} \\ & P \Rightarrow \mathbf{T} & \\ \equiv & & \{(\text{Zero})\} \\ & \mathbf{T} & \end{array}$$

Quindi la formula è vera senza usare ulteriori ipotesi.

Alternativamente

$$\begin{array}{lll} & ((P \wedge Q) \Rightarrow R \wedge (R \Rightarrow S)) & \\ \equiv & & \{(\text{Trans.})\} \\ & ((P \wedge Q) \Rightarrow S) & \\ \equiv & & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\ & (\neg P \vee (\neg Q \vee S)) & \\ \equiv & & \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\ & P \Rightarrow \neg Q \vee S & \end{array}$$