LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2014/15
Terza esercitazione — 30/10/2014 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

1. Si consideri l'alfabeto con simboli di costante $\{A, P\}$ e simboli di predicato binari $\{amici(\_,\_), = (\_,\_)\}$ e l'interpretazione $(\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme delle persone e

   - $\alpha(A) =$ "la persona chiamata Andrea" e $\alpha(P) =$ "la persona chiamata Paolo";
   - $\alpha(amici)(p, q)$ è vera se e solo se p e q sono amici;
   - $\alpha(=)(p, q)$ è vera se e solo se p e q sono la stessa persona.

   Si fornisca per ognuno dei seguenti enunciati una formula del primo ordine che lo formalizzi

   (a) "Tutti sono amici di se stessi"
   (b) "Tutti hanno qualcuno che è loro amico"
   (c) "Paolo ha un solo amico"
   (d) "Ogni amico di Paolo è amico di Andrea"
   (e) "Paolo non ha amici in comune con Andrea"

   SOLUZIONE ESERCIZIO 1

   (a) $(\forall x.amici(x, x)))$
   (b) $(\forall x.(\exists y.amici(x, y)))$
   (c) $(\exists x.amici(x, P) \wedge (\forall y.amici(y, P) \Rightarrow =(x, y)))$
   In generale, non si accetta la scrittura $(\exists!x.P(x))$, per indicare l'**unicità**. Si richiede invece la forma $(\exists x.P(x) \wedge (\forall y.P(y) \Rightarrow =(x, y)))$.
   (d) $(\forall x.amici(x, P) \Rightarrow amici(x, A))$
   (e) $(\forall x.amici(x, P) \Rightarrow \neg amici(x, A))$
   Soluzioni alternative:
   $\neg(\exists x.amici(x, P) \wedge amici(x, A))$
   $(\forall x.(\forall y.amici(x, P) \wedge amici(y, A) \Rightarrow \neg = (x, y)))$

2. Per ognuno dei seguenti enunciati si fornisca un adeguato alfabeto del primo ordine, una interpretazione sul dominio delle persone e una formula del primo ordine che lo formalizzi

   (a) "Ogni senatore ha un segretario, ma il senatore Razzi ne ha più di uno"
   (b) "Mario è zio di Lucia se è il fratello di sua madre o di suo padre"

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

(a) "Ogni senatore ha un segretario, ma il senatore Razzi ne ha più di uno"

- **Alfabeto**: $\mathbf{C} = \{Razzi\}$, $\mathbf{F} = \emptyset$, $\mathbf{P} = \{senatore(\_), segretarioDi(\_,\_), =(\_,\_)\}$,
- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$, con
  - $\mathbf{D} = \mathcal{P}$, con $\mathcal{P}$ insieme delle persone.
  - $\alpha(Razzi) =$ "la persona chiamata Razzi"
  - $\alpha(senatore)(d) \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è un senatore.
  - $\alpha(segretarioDi)(d, d') \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è un segretario di d'
  - $\alpha(=)(d, d')$ è vera se e solo se d e d' sono la stessa persona.

(b) Considerando che "il senatore Razzi ha più di un segretario" equivale a dire che ne ha almeno due, l'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$\begin{array}{rl} & (\forall x.senatore(x) \Rightarrow (\exists y.segretarioDi(y, x))) \land \\ senatore(Razzi) \ \land & (\exists y.(\exists z.segretarioDi(y, Razzi) \land segretarioDi(z, Razzi) \land \neg =(y, z)))) \end{array}$$

(c) "Mario è zio di Lucia se è il fratello di sua madre o di suo padre"

- **Alfabeto**: $\mathbf{C} = \{Mario, Lucia\}$, $\mathbf{F} = \{madre(\_), padre(\_)\}$, $\mathbf{P} = \{zio(\_,\_), fratelli(\_,\_)\}$,
- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$, con
  - $\mathbf{D} = \mathcal{P}$, con $\mathcal{P}$ insieme delle persone.
  - $\alpha(Mario) =$ "la persona chiamata Mario"
  - $\alpha(Lucia) =$ "la persona chiamata Lucia"
  - $\alpha(madre)(d) = d'$ se e solo se d' è la madre di d
  - $\alpha(padre)(d) = d'$ se e solo se d' è il padre di d
  - $\alpha(zio)(d, d') \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d è zio di d'
  - $\alpha(fratelli)(d, d') \equiv \mathbf{T}$ se e solo se d e d' sono fratelli

L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$zio(Mario, Lucia) \Leftarrow fratelli(Mario, madre(Lucia)) \lor fratelli(Mario, padre(Lucia))$$

Si noti che abbiamo considerato *madre* e *padre* come simboli di funzione unari. Alternativamente li si poteva introdurre come simboli di predicato binari. In questo caso nella soluzione l'insieme $\mathbf{F}$ sarebbe vuoto, mentre $\mathbf{P}$ conterrebbe anche $madre(\_,\_)$ e $padre(\_,\_)$ con la seguente interpretazione:

$$\alpha(madre)(d, d') \equiv \mathbf{T} \text{ se e solo se } d \text{ è madre di } d'$$

e analogamente per *padre*. Una possibile formalizzazione in questo caso sarebbe:

$$zio(Mario, Lucia) \Leftarrow (\exists x.fratelli(Mario, x) \land (madre(x, Lucia) \lor padre(x, Lucia))$$

3. Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall z \,.\, P(z)) \vee (\forall y \,.\, (\exists x \,.\, Q(x,y) \wedge P(x)))$$

nell'interpretazione $I = (D, \alpha)$, dove $D = \{a, b, c\}$ ed α è definita come segue

$$\alpha(P)(z) = \begin{cases} T & \text{se } z \in \{a, b\}, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \alpha(Q)(z,v) = \begin{cases} T & \text{se } (z,v) \in \{(a,a),(c,a),(c,b),(b,c)\}, \\ F & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli cioè $I_{\rho_0}(\Phi)$ usando le regole della semantica del primo ordine, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Soluzione Presentiamo una soluzione parzialmente informale.

Si richiede di valutare, nell'interpretazione data, il valore di verità della formula $\Phi = (\forall z \,.\, P(z)) \vee (\forall y \,.\, (\exists x \,.\, Q(x,y) \wedge P(x)))$.

- Trattandosi della disgiunzione di due formule, essa è vera se lo è almeno una delle due (regola (S5)).

- La prima formula $(\forall z \,.\, P(z))$, essendo una **quantificazione universale**, per la regola (S8) è vera se e solo se assegnando a z un qualunque valore d la formula $P(z)$ diventa vera, ovvero $\alpha(P)(d)$ è vera. Formalmente, $I_{\rho_0}((\forall z.P(z)))$ è vera se e solo se $I_{\rho_0[d/z]}(P(z))$ è vera per ogni valore d del dominio. Tuttavia dalla definizione di P, sappiamo che $\alpha(P)(c)$ è falsa, e quindi anche la formula $(\forall z \,.\, P(z))$ lo è.

- Anche la seconda formula $(\forall y \,.\, (\exists x \,.\, Q(x,y) \wedge P(x)))$ è una **quantificazione universale**, e quindi è vera se e solo se per ogni valore $d \in D$ del dominio, sostituendo y con d si rende vera la formula $\Psi = (\exists x \,.\, Q(x,y) \wedge P(x))$. Formalmente, $I_{\rho_0}((\forall y \,.\, (\exists x \,.\, Q(x,y) \wedge P(x))))$ è vera se e solo se $I_{\rho_0[d/y]}(\Psi)$ è vera per ogni valore d del dominio. In particolare, deve essere vera assegnando b a y. Dobbiamo verificare quindi che $I_{\rho_0[b/y]}(\exists x \,.\, Q(x,y) \wedge P(x)))$ sia vera.

  - Poiché $(\exists x \,.\, Q(x,y) \wedge P(x))$ è una **quantificazione esistenziale**, per la regola (S9) $I_{\rho_0[b/y]}(\exists x \,.\, Q(x,y) \wedge P(x)))$ è vera se esiste un valore d' del dominio che assegnato a x rende vera la formula $Q(x,y) \wedge P(x)$. Dobbiamo verificare quindi che $I_{\rho_0[b/y][d'/x]}(Q(x,y) \wedge P(x))$ sia vera. Tuttavia, nessun valore del dominio rende vera questa formula, come si può verificare, usando le regole (S1) e (S4):

$$\begin{aligned} I_{\rho_0[b/y][a/x]}(Q(x,y) \wedge P(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{F} \\ I_{\rho_0[b/y][b/x]}(Q(x,y) \wedge P(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{F} \\ I_{\rho_0[b/y][c/x]}(Q(x,y) \wedge P(x)) &= \mathbf{T} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F} \end{aligned}$$

- Ne consegue che la formula Φ è falsa nell'interpretazione data.

4. Per ognuno dei seguenti enunciati si fornisca un adeguato alfabeto del primo ordine, una interpretazione su un dominio da definire e una formula del primo ordine che lo formalizzi

   (a) "Le squadre che non hanno passato la prima fase sono scarse,
   ma ci sono squadre scarse, come il Brasile, che hanno passato la prima fase"

   (b) "Tutti gli studenti che superano l'esame di un corso lo hanno frequentato"

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

(a)
- **Alfabeto**: $\mathbf{C} = \{Brasile\}$, $\mathbf{F} = \emptyset$, $\mathbf{P} = \{scarsa(\_), prima(\_)\}$,
- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$, con
  - $\mathbf{D} = \mathcal{P}$, con $\mathcal{P}$ insieme delle squadre di calcio.
  - $\alpha(Brasile) =$ "la squadra nazionale del Brasile"
  - $\alpha(scarsa)(d) = \mathbf{T}$ se e solo se d è una squadra scarsa
  - $\alpha(prima)(d) = \mathbf{T}$ se e solo se d è una squadra che ha passato la prima fase
- L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$(\forall x. \neg prima(x) \Rightarrow scarsa(x)) \wedge (scarsa(Brasile) \wedge prima(Brasile))$$

(b)
- **Alfabeto**: $\mathbf{C} = \emptyset$, $\mathbf{F} = \emptyset$, $\mathbf{P} = \{corso(\_), studente(\_), supera(\_,\_), frequentato(\_,\_)\}$,
- **Interpretazione**: $\mathbf{I} = (\mathbf{D}, \alpha)$, con
  - $\mathbf{D} = \mathcal{S} \uplus \mathcal{C}$, con $\mathcal{S}$ insieme degli studenti e $\mathcal{C}$ insieme dei corsi.
  - $\alpha(studente)(d) = \mathbf{T}$ se e solo se d è uno studente
  - $\alpha(corso)(d) = \mathbf{T}$ se e solo se d è un corso
  - $\alpha(supera)(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se lo studente d supera l'esame del corso d'
  - $\alpha(frequentato)(d, d') = \mathbf{T}$ se e solo se lo studente d ha frequentato il corso d'
- L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$(\forall x. (\forall y. studente(x) \wedge corso(y) \wedge supera(x, y) \Rightarrow frequentato(x, y)))$$