LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2014/15
Quarta esercitazione — 25/11/2014 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

1. Si provi che le seguenti formule sono valide:

   (a) $(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow \neg(\exists x.\neg R(x) \wedge \neg Q(x))$

   (b) $(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$

   (c) $(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee P(x))$

   (d) $(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

(a) Parto dalla conclusione:

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\exists x.\neg R(x) \wedge \neg Q(x)) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\forall x.\neg(\neg R(x) \wedge \neg Q(x))) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\forall x.R(x) \vee Q(x))
\end{array}$$

Riparto dalle premesse:

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \\
\equiv & \quad \{(\forall : \wedge)\} \\
 & (\forall x.(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow) \text{ due volte}\} \\
 & (\forall x.(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg\neg P(x) \vee R(x))) \\
\equiv & \quad \{(\text{Doppia Negazione})\} \\
 & (\forall x.(\underline{\neg P(x)} \vee Q(x)) \wedge (\underline{P(x)} \vee R(x))) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{risoluzione})\} \\
 & (\forall x.Q(x) \vee R(x))
\end{array}$$

Arrivo cioè alla formula equivalente alla conclusione.

(b) Dobbiamo dimostrare che

$$(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$$

Vediamo due possibili soluzioni.

[**Con Skolemizzazione**] Utilizzando la regola della Skolemizzazione **(Skolemizzazione-$\Rightarrow$)** (si veda la Tabella delle Leggi pubblicata sul sito), è sufficiente dimostrare allora che

$$(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \wedge \neg S[a/x] \wedge R[a/x] \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$$

dove a è una costante nuova. Intuitivamente, è come se chiamassimo a un ipotetico elemento del dominio che testimonia la verità di $(\exists x.\neg S(x) \wedge R(x))$.

Parto allora dalla premessa:

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \wedge \neg S[a/x] \wedge R[a/x] \\
\Rightarrow & \quad \{\text{sempl-}\wedge\} \\
 & (\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg S(a) \wedge R(a) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{elim-}\forall)\text{, con occ. positiva}\} \\
 & (R(a) \Rightarrow Q(a)) \wedge \neg S(a) \wedge R(a) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{modus ponens})\text{, con occ. positiva}\} \\
 & Q(a) \wedge \neg S(a) \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{Intro-}\exists)\} \\
 & (\exists x.Q(x) \wedge \neg S(x)) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & \neg(\forall x.\neg(Q(x) \wedge \neg S(x))) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & \neg(\forall x.\neg Q(x) \vee S(x))) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\text{ al contrario}\} \\
 & \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x)))
\end{array}$$

Otteniamo cioè la conclusione.

[**Con eliminazione dell'implicazione**]

$$\begin{array}{ll}
 & (\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x)) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & \neg((\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x))) \vee \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x)) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\text{, due volte}\} \\
 & \neg(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \vee \neg(\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \vee (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow S(x))) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\text{ due volte, }(\neg\text{–} \Rightarrow)\} \\
 & (\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow Q(x))) \vee (\forall x.\neg(\neg S(x) \wedge R(x))) \vee (\exists x.Q(x) \wedge \neg S(x)) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\text{, }(\neg\text{–} \Rightarrow)\} \\
 & (\exists x.R(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))) \vee (\exists x.Q(x) \wedge \neg S(x))
\end{array}$$

$\equiv$ $\{$(commutatività), $(\exists : \vee)\}$

$(\exists x.(R(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (Q(x) \wedge \neg S(x))) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))$

$\equiv$ $\{$(Doppia negazione), (De Morgan)$\}$

$\neg(\forall x.\neg\big((R(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (Q(x) \wedge \neg S(x))\big)) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))$

$\equiv$ $\{$(De Morgan)$\}$

$\neg(\forall x.(\neg R(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee S(x))) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))$

$\Leftarrow$ $\{$(risoluzione), con occ. negativa$\}$

$\neg(\forall x.\neg R(x) \vee S(x)) \vee (\forall x.S(x) \vee \neg R(x))$

$\equiv$ $\{$(terzo escluso)$\}$

T

Abbiamo dimostrato che la formula è valida perché è implicata da T.

(c) Partiamo dalla premessa:

$(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x)))$

$\equiv$ $\{$(De Morgan)$\}$

$(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge ((\forall x.\neg R(x)) \vee (\forall x.Q(x)))$

$\Rightarrow$ $\{(\forall\text{-}\vee)$, con occ. positiva$\}$

$(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\forall x.\neg R(x) \vee Q(x))$

$\equiv$ $\{(\forall\text{-}\wedge)\}$

$(\forall x.(\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x))) \qquad (*)$

$\equiv$ $\{$(elim-$\Rightarrow$)$\}$

$(\forall x.(P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x)))$

$\Rightarrow$ $\{$(risoluzione)$\}$

$(\forall x.P(x) \vee Q(x))$

Arriviamo cioè alla conclusione desiderata.
Nota che sarebbe possibile anche sostituire l'ultima parte della catena di equivalenze e implicazioni con

$(\forall x.(\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg R(x) \vee Q(x))) \qquad (*)$

$\equiv$ $\{$(elim-$\Rightarrow$) al contrario$\}$

$(\forall x.(\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (R(x) \Rightarrow Q(x)))$

$\Rightarrow$ $\{$(transitività)$\}$

$(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow Q(x))$

$\Rightarrow$ $\{$(elim-$\Rightarrow$)$\}$

$(\forall x.P(x) \vee Q(x))$

(d) Dobbiamo dimostrare che

$$(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$$

per la regola **(Skolemizzazione-⇒)** è sufficiente dimostrare allora che

$$(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (R[a/x] \Rightarrow Q[a/x]) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$$

con a nuova costante. Partiamo allora da queste premesse:

$(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (R[a/x] \Rightarrow Q[a/x]) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x)))$

$\Rightarrow$ {(sempl-$\wedge$)}

$(R(a) \Rightarrow Q(a)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x)))$

$\Rightarrow$ {(elim-$\Rightarrow$), (elim-$\forall$)}

$(\neg R(a) \vee Q(a)) \wedge \neg(P(a) \vee Q(a))$

$\equiv$ {(De Morgan), (commutatività)}

$(\neg R(a) \vee Q(a)) \wedge \neg Q(a) \wedge \neg P(a)$

$\equiv$ {(associatività), (complemento)}

$\neg R(a) \wedge \neg Q(a) \wedge \neg P(a)$

$\Rightarrow$ {(commutatività), (sempl-$\wedge$)}

$\neg Q(a) \wedge \neg R(a)$

$\Rightarrow$ {(De Morgan) al contrario, (intro-$\vee$)}

$\neg(Q(a) \vee R(a)) \vee \neg P(a)$

$\equiv$ {(elim-$\Rightarrow$) al contrario}

$Q(a) \vee R(a) \Rightarrow \neg P(a)$

$\Rightarrow$ {(intro-$\exists$)}

$(\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$

2. Si formalizzino i seguenti enunciati dichiarativi usando l'interpretazione standard sui naturali e ipotizzando che **a**, **b** e **c** siano array con dominio $[0, n)$.

   (a) x è il numero di elementi dell'array **a** che sono maggiori della somma degli elementi che lo precedono;

   (b) x è uguale alla somma dei quadrati degli elementi dell'array **a** con indice pari;

   (c) l'array **b** contiene il doppio di ogni elemento dell'array **a**, ma contiene anche almeno un elemento dispari minore del minimo di **a**;

   (d) l'array **a** è simmetrico rispetto al suo elemento centrale;[1]

   (e) **b** è l'array **a** ordinato in senso crescente.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

(a) x è il numero di elementi dell'array **a** che sono maggiori della somma degli elementi che lo precedono;

$$x = \#\{i : i \in [0, n) \mid a[i] \geq (\Sigma j : j \in [0, i-1) \,.\, a[j])\}$$

(b) x è uguale alla somma dei quadrati degli elementi dell'array **a** con indice pari;

$$x = (\Sigma i : i \in [0, n) \wedge pari(i) \,.\, a[i]^2)$$

(c) l'array **b** contiene il doppio di ogni elemento dell'array **a**, ma contiene anche almeno un elemento dispari minore del minimo di **a**. Usando il quantificatore *min*, la soluzione è:

$$\begin{array}{l}(\forall i \,.\, i \in [0, n) \Rightarrow (\exists j \,.\, j \in [0, n) \wedge b[j] = 2 * a[i])) \wedge \\ (\exists k \,.\, k \in [0, n) \wedge \neg pari(b[k]) \wedge b[k] < (min\ h : h \in [0, n) \,.\, a[h]))\end{array}$$

(d) l'array **a** è simmetrico rispetto al suo elemento centrale;

$$(\forall j \,.\, j \in [0, n\ div\ 2) \Rightarrow a[j] = a[n - j - 1])$$

(e) **b** è l'array **a** ordinato in senso crescente. Questo equivale a dire che **b** è una permutazione dell'array **a** e che **b** è ordinato. Suddividiamo:

- Dire che **b** è una permutazione dell'array **a**, equivale a dire che ogni intero compare in **a** lo stesso numero di volte che compare in **b**.

$$(\forall m \,.\, \#\{i : i \in [0, n) \mid a[i] = m\} = \#\{j \,.\, j \in [0, n) \mid b[j] = m\}) \qquad (2)$$

- **b** è ordinato in senso crescente.

$$(\forall j \,.\, j \in [0, n-1) \Rightarrow a[j] < a[n+1]) \qquad (1)$$

La condizione cercata è allora (1) $\wedge$ (2).

[1] In questo caso l'array è chiamato *palindromo*.

3. Si consideri il seguente array **a** con dominio $[0, 4)$:

3	10	5	11

Si dimostri, utilizzando più volte la legge dell'intervallo per la sommatoria, la validità della seguente formula:

$$m = (\Sigma x \,:\, x \in [0, 4) \wedge pari(x) \,.\, \mathbf{a}[x]^2) \qquad \equiv \qquad m = 34$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

$m = (\Sigma x \,:\, x \in [0, 4) \wedge pari(x) \,.\, \mathbf{a}[x]^2)$

$\equiv \qquad \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \sim pari(3)\}$

$m = (\Sigma x \,:\, x \in [0, 2] \wedge pari(x) \,.\, \mathbf{a}[x]^2)$

$\equiv \qquad \{(\text{Intervallo-}\Sigma), pari(2)\}$

$m = (\Sigma x \,:\, x \in [0, 1] \wedge pari(x) \,.\, \mathbf{a}[x]^2) + 5 * 5$

$\equiv \qquad \{(\text{Intervallo-}\Sigma), \sim pari(1)\}$

$m = (\Sigma x \,:\, x \in [0, 0] \wedge pari(x) \,.\, \mathbf{a}[x]^2) + 25$

$\equiv \qquad \{(\text{Intervallo-}\Sigma), pari(0)\}$

$m = (\Sigma x \,:\, x \in \emptyset \wedge pari(x) \,.\, \mathbf{a}[x]^2) + 25 + 3 * 3$

$\equiv \qquad \{(\Sigma\text{-vuoto})\}$

$m = 25 + 9$

$\equiv \qquad \{(\text{calcolo})\}$

$m = 34$