LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2016/17
Prima esercitazione — 4/10/2016 — Soluzioni Proposte

Attenzione: Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

1. Si formalizzino i seguenti enunciati dichiarativi:

   (a) "Angelo viene alla festa, ma Bruno no"

   (b) "Carlo viene alla festa se non vengono Angelo e Bruno"

   (c) "Carlo viene alla festa solo se viene Davide, ma se viene Davide allora Bruno non viene"

   (d) "Affinché Angelo venga alla festa è necessario che se non vengono Bruno e Carlo, allora venga Davide"

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Per prima cosa introduciamo un simbolo proposizionale per ogni proposizione elementare; nel nostro caso si tratta delle quattro proposizioni seguenti:

- **A** per "Angelo viene alla festa"
- **B** per "Bruno viene alla festa"
- **C** per "Carlo viene alla festa"
- **D** per "Davide viene alla festa"

Successivamente si costruisce la formula collegando le occorrenze dei simboli proposizionali con connettivi logici, suggeriti dalle congiunzioni linguistiche, in modo da rispecchiare fedelmente il significato originale.

Può essere utile completare le frasi (vedi parte tra parentesi), evidenziare le proposizioni (vedi riquadri) elementari o elementari negate e le congiunzioni (vedi parti in corsivo).

(a) "$\boxed{\text{Angelo viene alla festa}}$, *ma* $\boxed{\text{Bruno \textit{no} (ovvero Bruno \textit{non} viene alla festa)}}$"
Rendiamo *ma* con il connettivo $\wedge$ e *non* con il connettivo $\neg$. La proposizione si formalizza allora come:

$$\mathbf{A} \ \wedge \neg\, \mathbf{B}$$

(b) "$\boxed{\text{Carlo viene alla festa}}$ *se* $\boxed{\text{\textit{non} vengono (alla festa) Angelo \textit{e} Bruno}}$"
In questo caso "*non* vengono (alla festa) Angelo *e* Bruno" indica che né Angelo, né Bruno vengono alla festa. La congiunzione *e* viene resa con il connettivo $\wedge$. La presenza di *se* deve far pensare ad una implicazione, anche se non troviamo *allora*. Non ci si faccia ingannare dall'ordine delle due proposizioni elementari. Si provi in questi casi ad invertirlo:
"*se* $\boxed{\text{\textit{non} vengono (alla festa) Angelo \textit{e} Bruno}}$ (*allora*) $\boxed{\text{Carlo viene alla festa}}$ "
La proposizione si formalizza allora come:

$$\neg\, \mathbf{A} \ \wedge \neg\, \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}$$

(c) "$\boxed{\text{Carlo viene alla festa}}$ *solo se* $\boxed{\text{viene Davide (cioè viene alla festa)}}$, *ma se* $\boxed{\text{viene Davide}}$ *allora* $\boxed{\text{Bruno \textit{non} viene (cioè Bruno viene alla festa)}}$"

Dire che "P *solo se* Q" è un altro modo di dire "P *implica* Q". Anche la presenza di *se* e di *allora* ci porta ad avere una implicazione e, come prima, rendiamo *ma* con il connettivo $\wedge$ e *non* con il connettivo $\neg$.

La proposizione si formalizza allora come:

$$(\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D}) \wedge (\mathbf{D} \Rightarrow \neg\, \mathbf{B})$$

(d) "*Affinché* $\boxed{\text{Angelo venga alla festa}}$ è *necessario* che *se* $\boxed{\textit{non} \text{ vengono (alla festa) Bruno } \textit{e} \text{ Carlo}}$, *allora* $\boxed{\text{venga Davide (alla festa)}}$"

Per prima cosa dobbiamo individuare le due sotto-proposizioni:

- *Affinché* $\boxed{\text{Angelo venga alla festa}}$
- *se* $\boxed{\textit{non} \text{ vengono (alla festa) Bruno } \textit{e} \text{ Carlo}}$, *allora* $\boxed{\text{venga Davide (alla festa)}}$

Dire che "Q *è necessario (è condizione necessaria) affinché* P" è un altro modo di dire che "P *implica Q*". Come nei casi precedenti, la presenza di *se* e di *allora* ci porta ad avere una implicazione, quella di *ma* ad avere il connettivo $\wedge$ e quella di *non* ad avere $\neg$.

La proposizione si formalizza allora come:

$$\mathbf{A} \Rightarrow (\neg\, \mathbf{B} \ \wedge \neg\, \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{D})$$

2. Aggiungere alle formule seguenti le parentesi implicitamente determinate dalle regole di precedenza tra connettivi logici. Dire se le formule risultanti sono ambigue oppure no.

(a) $A \wedge (B \vee \neg C) \vee D \Rightarrow C$

(b) $\neg A \vee B \Rightarrow C \equiv \neg C \wedge B \Rightarrow A$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Ricordiamo che l'ordine di precedenza tra gli operatori è il seguente: $\equiv$ (livello 0), $\Rightarrow$ and $\Leftarrow$ (livello 1), $\wedge$ and $\vee$ (livello 2), and $\neg$ (livello 3).

(a) $A \wedge (B \vee \neg C) \vee D \Rightarrow C$ (a) è ambigua, perché non c'è priorità tra $\wedge$ e $\vee$ e quindi posso avere due modi per "parentesizzare" (e quindi due possibili alberi di derivazione);

(b) $\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\neg A}_{3} \vee B}_{2} \Rightarrow C}_{1} \equiv \underbrace{\underbrace{\underbrace{\neg C}_{3} \wedge B}_{2} \Rightarrow A}_{1}}_{0}$ (b) non è ambigua, dato che i livelli di precedenza sono sufficienti per disambiguare e raggruppare come se avessimo la formula:
$(((\neg A \vee B) \Rightarrow C) \equiv ((\neg C \wedge B) \Rightarrow A)))$

3. In base alle regole di precedenza tra connettivi logici e alle leggi di associatività, indicare nelle seguenti proposizioni tutte le parentesi che possono essere rimosse senza alterarne il significato:

(a) $(\ (\ (\ P \vee Q\ )\ \Rightarrow\ (\ R \wedge S\ )\ )\ \Rightarrow\ (\ (\ P \Rightarrow S\ )\ \vee\ (\ Q \Rightarrow R\ )\ )\ )$

(b) $(\ (\ A \wedge \neg\ (\ B \wedge C\ )\ )\ \Rightarrow\ (\ C \vee\ (\ D \Rightarrow E\ )\ )\ )$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

(a) $(((P \vee Q) \Rightarrow (R \wedge S)) \Rightarrow ((P \Rightarrow S) \vee (Q \Rightarrow R)))$
$(P \vee Q \Rightarrow R \wedge S) \Rightarrow (P \Rightarrow S) \vee (Q \Rightarrow R)$

(b) $((A \wedge \neg (B \wedge C)) \Rightarrow (C \vee (D \Rightarrow E)))$
$A \wedge \neg (B \wedge C) \Rightarrow C \vee (D \Rightarrow E)$

4. Per ognuna delle seguenti proposizioni dire se si tratta di una tautologia, di una contraddizione o di nessuna delle due. Motivare la risposta.

(a) $P \Rightarrow P \wedge Q$

(b) $(Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \Rightarrow R)$

(c) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P \wedge R)$

(d) $(\neg Q \Rightarrow P) \vee (Q \Rightarrow \neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

(a) $P \Rightarrow P \wedge Q$

- La proposizione non può essere una tautologia, dato che è possibile individuare valori delle variabili proposizionali che la rendono falsa. Prendendo infatti l'interpretazione $\{P \mapsto \mathbf{T}, Q \mapsto \mathbf{F}\}$, ottengo $\mathbf{F}$.
- La proposizione non può essere nemmeno una contraddizione, dato che è possibile individuare valori delle variabili proposizionali che la rendono vera. Prendendo infatti l'interpretazione $\{P \mapsto \mathbf{T}, Q \mapsto \mathbf{T}\}$ ottengo $\mathbf{T}$.

(b) $(Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \Rightarrow R)$ con l'interpretazione $\{P \mapsto \mathbf{T}, Q \mapsto \mathbf{T}, R \mapsto \mathbf{T}\}$ ottengo $\mathbf{T}$ e quindi non può essere una contraddizione. Si tratta invece di una tautologia, ovvero di una formula che vale $\mathbf{T}$ per qualunque valore assegnato alle variabili. Per dimostrarlo, si può procedere, costruendo una dimostrazione, basata sulle leggi introdotte a lezione. Procediamo quindi per sostituzione. Nel seguito si usa la sottolineatura per evidenziare a quale parte della formula si applica la legge indicata:

$$\underline{(Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P)} \vee (Q \Rightarrow R)$$

$\equiv$ $\{$(Distrib.), al contrario$\}$

$$(Q \wedge \underline{(P \vee \neg P)}) \vee (Q \Rightarrow R)$$

$\equiv$ $\{$(Terzo Escluso)$\}$

$$\underline{(Q \wedge \mathbf{T})} \vee (Q \Rightarrow R)$$

$\equiv$ $\{$(Elemento Neutro)$\}$

$$Q \vee \underline{(Q \Rightarrow R)}$$

$\equiv$ $\{$(Elim-$\Rightarrow$)$\}$

$$\underline{Q \vee (\neg Q \vee R)}$$

$\equiv$ $\{$(Assoc.)$\}$

$$\underline{(Q \vee \neg Q)} \vee R$$

$\equiv$ $\{$(Terzo Escluso)$\}$

$\underline{\mathbf{T} \vee R}$

$\equiv \quad \{(\text{Elemento Assorbente})\}$

$\mathbf{T}$

(c) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P \wedge R)$ Si tratta anche in questo caso di una tautologia, come si può vedere, procedendo per sostituzione:

$\underline{(P \Rightarrow Q)} \vee \underline{(Q \Rightarrow P \wedge R)}$

$\equiv \quad \{(\text{Elim-}\Rightarrow)\}$

$\underline{(\neg P \vee Q) \vee (\neg Q \vee (P \wedge R))}$

$\equiv \quad \{(\text{Ass.})\}$

$\neg P \vee \underline{(Q \vee \neg Q)} \vee (P \wedge R)$

$\equiv \quad \{(\text{Terzo Escluso})\}$

$\underline{\neg P \vee \mathbf{T}} \vee (P \wedge R)$

$\equiv \quad \{(\text{Comm.})\}$

$\underline{\mathbf{T} \vee (\neg P \vee (P \wedge R))}$

$\equiv \quad \{(\text{Elem. Ass.})\}$

$\mathbf{T}$

(d) $(\neg Q \Rightarrow P) \vee (Q \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)) \Rightarrow R$ con l'interpretazione $\{P \mapsto \mathbf{F}, Q \mapsto \mathbf{F}, R \mapsto \mathbf{F}\}$ ottengo $\mathbf{F}$ e quindi non può essere una tautologia; non può essere nemmeno una contraddizione, basti prendere l'interpretazione $\{P \mapsto \mathbf{T}, Q \mapsto \mathbf{T}, R \mapsto \mathbf{T}\}$ che ci fa ottenere $\mathbf{T}$.

5. Dimostrare che le seguenti proposizioni sono tautologie:

(a) $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$

(b) $P \wedge Q \wedge (\neg Q \Rightarrow R) \Rightarrow P \vee R$

(c) $(P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S) \equiv (P \Rightarrow S) \vee (R \Rightarrow Q)$

(d) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

SOLUZIONE ESERCIZIO 5
Procediamo per sostituzione.

(a) $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$

$\underline{(\neg P \wedge (P \vee Q)) \Rightarrow Q}$

$\equiv \quad \{(\text{ Elim-}\Rightarrow)\}$

$\underline{\neg(\neg P \wedge (P \vee Q))} \vee Q$

$\equiv \quad \{(\text{De Morgan}), (\text{Doppia Neg.})\}$

$P \vee \underline{\neg(P \vee Q)} \vee Q$

$\equiv \quad \{(\text{De Morgan})\}$

$\underline{P \vee (\neg P \wedge \neg Q)} \vee Q$

$\equiv \quad \{(\text{Compl.})\}$

$\underline{(P \vee \neg Q) \vee Q}$

$\equiv \quad \{(\text{Ass.})\}$

$P \vee \underline{(\neg Q \vee Q)}$

$\equiv \quad \{(\text{Terzo escluso})\}$

$\underline{P \vee \mathbf{T}}$

$\equiv \quad \{(\text{Elemento Ass.})\}$

$\mathbf{T}$

(b) $(P \wedge Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow R) \Rightarrow P \vee R$

$\underline{((P \wedge Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \vee R)}$

$\equiv \quad \{(\text{ Elim-}\Rightarrow)\}$

$\neg((P \wedge Q) \wedge \underline{(\neg Q \Rightarrow R)}) \vee (P \vee R)$

$\equiv \quad \{(\text{ Elim-}\Rightarrow \text{ e Doppia Neg.})\}$

$\underline{\neg((P \wedge Q) \wedge (Q \vee R))} \vee (P \vee R)$

$\equiv \quad \{(\text{ De Morgan})\}$

$\underline{\neg(P \wedge Q)} \vee \underline{\neg(Q \vee R)} \vee (P \vee R)$

$\equiv \quad \{(\text{ De Morgan})\}$

$\underline{(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg Q \wedge \neg R) \vee (P \vee R)}$

$\equiv \quad \{(\text{ Ass. e Comm.})\}$

$\underline{(\neg P \vee P)} \vee (\neg Q \vee R) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$

$\equiv \quad \{(\text{ Terzo Escluso})\}$

$\underline{\mathbf{T} \vee ((\neg Q \vee R) \vee (\neg Q \wedge \neg R))}$

$\equiv \quad \{(\text{ Elem. Ass.})\}$

$\mathbf{T}$

(c) $(P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S) \equiv (P \Rightarrow S) \vee (R \Rightarrow Q)$

Procedo sviluppando il termine a sinistra, il che mi riconduce al termine a destra, dimostrandone così l'equivalenza.

$\underline{(P \Rightarrow Q)} \vee \underline{(R \Rightarrow S)}$

$\equiv \quad \{(\text{ Elim-}\Rightarrow)\}$

$\underline{(\neg P \vee Q) \vee (\neg R \vee S)}$

$\equiv \quad \{(\text{ Ass. e Comm.})\}$

$\underline{(\neg P \vee S)} \vee \underline{(\neg R \vee Q)}$

$\equiv$ $\{$(Elim-$\Rightarrow$) al contario, due volte$\}$

$(P \Rightarrow S) \vee (R \Rightarrow Q)$

(d) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

$\underline{((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P}$

$\equiv$ $\{$(Elim-$\Rightarrow$)$\}$

$\neg\underline{((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P)} \vee P$

$\equiv$ $\{$(Elim-$\Rightarrow$)$\}$

$\neg(\neg\underline{(P \Rightarrow Q)} \vee P) \vee P$

$\equiv$ $\{$(Elim-$\Rightarrow$)$\}$

$\neg\underline{(\neg(\neg P \vee Q)} \vee P) \vee P$

$\equiv$ $\{$(De Morgan e Doppia Neg.)$\}$

$\underline{\neg((P \wedge \neg Q) \vee P)} \vee P$

$\equiv$ $\{$(De Morgan)$\}$

$(\underline{\neg(P \wedge \neg Q)} \wedge \neg P) \vee P$

$\equiv$ $\{$(De Morgan e Doppia Neg.)$\}$

$\underline{((\neg P \vee Q) \wedge \neg P) \vee P}$

$\equiv$ $\{$(Comm. e Compl.)$\}$

$\underline{(P \vee (\neg P \vee Q))}$

$\equiv$ $\{$(Ass.)$\}$

$\underline{(P \vee \neg P)} \vee Q$

$\equiv$ $\{$(Terzo Escluso)$\}$

$\underline{\mathbf{T} \vee Q}$

$\equiv$ $\{$(Elem. Ass.)$\}$

$\mathbf{T}$

Alternativamente e più rapidamente potremmo invece avere il seguente sviluppo, dove la legge *(Neg-$\Rightarrow$)* consente di ridurre il numero di passaggi:

$\underline{((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P}$

$\equiv$ $\{$(Elim-$\Rightarrow$)$\}$

$\underline{\neg((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P)} \vee P$

$\equiv$ $\{$(Neg-$\Rightarrow$)$\}$

$((P \Rightarrow Q) \wedge \neg P) \vee P$

$\equiv$ $\{$(Elim-$\Rightarrow$)$\}$

$\underline{((\neg P \vee Q) \wedge \neg P) \vee P}$

$$
\begin{array}{ll}
\equiv & \{(\text{ Comm. e Compl.})\} \\
& \underline{(P \vee (\neg P \vee Q))} \\
\equiv & \{(\text{ Ass.})\} \\
& \underline{(P \vee \neg P)} \vee Q \\
\equiv & \{(\text{ Terzo Escluso})\} \\
& \underline{\mathbf{T} \vee Q} \\
\equiv & \{(\text{ Elem. Ass.})\} \\
& \mathbf{T}
\end{array}
$$

6. Come compaiono P e $P \Rightarrow Q$ nelle seguenti proposizioni? Positivamente o negativamente?

   (a) $\neg P \Rightarrow R$

   (b) $\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \wedge R) \Rightarrow S)$

   (c) $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$

   (d) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \wedge \neg(P \Rightarrow Q)$

   (e) $(\neg P \vee Q) \wedge \neg(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow S) \Rightarrow (R \vee S)$

   (f) $(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R \Rightarrow Q \wedge S)$

ALCUNE SOLUZIONI ESERCIZIO 6

(a) $\neg P \Rightarrow R$

Soluzione: Esiste una sola occorrenza di P che occorre positivamente. Infatti P occorre negativamente in $\neg P$, e a sua volta $\neg P$ occorre negativamente in $\neg P \Rightarrow R$: avendo incontrato un numero pari di occorrenze negative da P alla formula intera, concludiamo che l'occorrenza è positiva.

Possiamo visualizzare meglio la soluzione sottolineando le occorrenze negative in cui compare P e contando le sottolineature, come illustrato di seguito:

$$\underline{\neg \underline{P}} \Rightarrow R$$

Poiché P ha due sottolineature, cioè un numero pari, occorre positivamente.

(c) $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$: Questa formula è AMBIGUA, quindi sintatticamente errata. Pertanto non ha senso chiedersi se le occorrenze di certe sottoformule sono positive o negative.

(e) Sottilineamo tutte le occorrenze negative nella formula:

$$\underline{(\neg \underline{P} \vee Q) \wedge \neg \underline{(\underline{P} \Rightarrow Q)} \wedge (Q \Rightarrow S)} \Rightarrow (R \vee S)$$

Si vede che la prima occorrenza di P occorre positivamente, avendo un numero pari di sottolineature, mentre la seconda negativamente perché ne ha un numero dispari. L'occorrenza di $P \Rightarrow Q$ occorre positivamente.