LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2016/17
Quarta esercitazione — 15/11/2016

1. Assumendo che P, Q e R contengano la variabile libera x, si provi che la seguente formula è valida, utilizzando la regola della **Skolemizzazione**

$$(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg(\exists x.\neg(R(x) \Rightarrow \neg Q(x))) \wedge (\exists x.P(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x.\neg(Q(x) \Rightarrow R(x)))$$

2. Si dimostri che le seguenti formule del primo ordine sono valide:

   (a) $\neg(\exists x.P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge (\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x.\neg R(x) \Rightarrow Q(x))$

   (b) $(\forall x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x.\neg S(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg(\forall x.Q(x) \Rightarrow S(x))$

   (c) $\big(\forall x\,.\,\neg(B(x) \Rightarrow \neg A(x))\big) \vee \neg\big(\exists x\,.\,A(x) \vee (\neg B(x) \Rightarrow A(x))\big) \;\Rightarrow\; (\forall x\,.\,A(x) \Rightarrow B(x))$

   (d) $(\exists x.R(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x.\neg(P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow (\exists x.Q(x) \vee R(x) \Rightarrow \neg P(x))$

3. Dimostrare che le seguenti formule **non sono valide**:

   (a) $(\forall x\,.\,P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\exists x\,.\,Q(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,P(x))$

   (b) $(\forall x\,.\,P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x\,.\,P(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x\,.\,Q(x))$

4. Dimostrare in modo formale che delle seguenti formule una è valida e l'altra no.

   (a) $(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee P(x))$

   (b) $(\forall x.\neg P(x) \Rightarrow R(x)) \wedge (\neg(\exists x.R(x)) \vee (\forall x.Q(x))) \Rightarrow (\forall x.Q(x) \vee R(x))$