# LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2016/17
# Quinta esercitazione – 1/12/2016 – Soluzioni Proposte

**Attenzione:** Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

**ESERCIZIO 1** Si fornisca per ognuno dei seguenti enunciati una formula del primo ordine che lo formalizza usando l'interpretazione standard sui naturali e ipotizzando che **bar** e **foo** siano due array con dominio rispettivamente $[0, n)$ e $[0, m)$:

1. L'array **bar** ha al massimo un elemento minore di tutti gli elementi dell'array **foo**
2. Il primo elemento dell'array **foo**, se esiste, è proprio uguale al doppio della somma degli elementi pari dell'array **bar**
3. La sequenza costituita dall'array **bar** seguito dall'array **foo** è strettamente crescente.

**SOLUZIONE ESERCIZIO 1**

1. L'array **bar** ha al massimo un elemento minore di tutti gli elementi dell'array **foo**

   **Soluzione:**
   $$\#\{x : x \in [0, n) \mid \mathbf{bar}[x] < (\mathbf{min}\ y : y \in [0, m) \, . \, \mathbf{foo}[y])\} \leq 1$$

2. Il primo elemento dell'array **foo**, se esiste, è proprio uguale al doppio della somma degli elementi pari dell'array **bar**

   **Soluzione:**
   $$(m > 0) \Rightarrow \mathbf{foo}[0] = 2 \times \big(\Sigma\ x : x \in [0, n) \wedge pari(\mathbf{bar}[x]) \, . \, \mathbf{bar}[x]\big)$$

3. La sequenza costituita dall'array **bar** seguito dall'array **foo** è strettamente crescente.

   **Soluzione:**
   $$(\forall x \, . \, x \in [0, n-1) \Rightarrow \mathbf{bar}[x] < \mathbf{bar}[x+1]) \ \wedge \ (\forall x \, . \, x \in [0, m-1) \Rightarrow \mathbf{foo}[x] < \mathbf{foo}[x+1])$$
   $$\wedge \ ((n > 0) \wedge (m > 0) \Rightarrow \mathbf{bar}[n-1] < \mathbf{foo}[0])$$

**ESERCIZIO 2** Si verifichino le seguenti triple ($A$ è una variabile di specifica).

1. $\{A > 0 \ \wedge \ x = A \ \wedge y < x\}$
   $x := 2 * x + y;$
   $\{y < x\}$

2. $\{y > 0 \ \wedge \ x = y * y\}$
   $x := x + 2 * y + 1; \quad y := y + 1$
   $\{x = y * y\}$

3. $\{sum = (\Sigma i\colon i \in [0,x)\,.\,i)\}$
$sum := sum + x; x := x + 1$
$\{sum = (\Sigma i\colon i \in [0,x)\,.\,i)\}$

**SOLUZIONE ESERCIZIO 2**

1. $\{A > 0 \ \wedge \ x = A \ \wedge y < x\}$
$x := 2 * x + y;$
$\{y < x\}$

Possiamo ricorrere alla Regola dell'Assegnamento

$$\frac{R \Rightarrow \mathit{def}(E) \wedge P[E/x]}{\{R\}x := E\{P\}}$$

dove $\mathit{def}(E)$ è vera in uno stato $\sigma$ se il valore di $E$ in $\sigma$ (cioè $\mathcal{E}(E,\sigma)$) è ben definito. L'assegnamento $x := E$ parte dallo stato $\sigma$ e arriva nello stato $\sigma[\mathcal{E}(E,\sigma)/x]$.

La verifica si riduce allora a dimostrare che:

$(A > 0 \ \wedge \ x = A \ \wedge y < x) \Rightarrow \mathit{def}(2 * x + y) \wedge (y < x)[(2 * x + y)/x]$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione, ed utilizzando le premesse come ipotesi. Notiamo inoltre che $\mathit{def}(2 * x + y) \equiv \mathbf{T}$.

$y < 2 * x + y$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $x = A\}$

$y < (2 * A + y)$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $A > 0$, calcolo$\}$

$\mathbf{T}$

2. $\{y > 0 \ \wedge \ x = y * y\}$
$x := x + 2 * y + 1; \quad y := y + 1$
$\{x = y * y\}$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare un'asserzione $R$ tale che le seguenti triple siano verificate:

(2.1) $\{y > 0 \ \wedge \ x = y * y\} \quad x := x + 2 * y + 1 \quad \{R\}$
(2.2) $\{R\} \quad y := y + 1 \quad \{x = y * y\}$

Per l'Assioma dell'Assegnamento, la (2.2) è verificata per il seguente valore di $R$:

$\mathit{def}(y + 1) \wedge (x = y * y)[y + 1/y]$

$\equiv$ $\{$sostituzione, definizione di $\mathit{def}\}$

$x = (y+1) * (y+1)$

Allora, per la Regola dell'Assegnamento, la verifica di (2.1) con la postcondizione $R$ appena calcolata, si riduce a dimostrare che:

$$(y > 0 \ \wedge \ x = y * y) \Rightarrow def(x + 2 * y + 1) \wedge (x = (y+1) * (y+1))[x + 2 * y + 1/x]$$

Partiamo dalla conseguenza:

$def(x + 2 * y + 1) \wedge (x = (y+1) * (y+1))[x + 2 * y + 1/x]$

$\equiv$ {sostituzione, definizione di *def*}

$(x + 2 * y + 1) = (y+1) * (y+1)$

$\equiv$ {calcolo}

$(x + 2 * y + 1) = (y * y + 2 * y + 1)$

$\equiv$ {**Ip:** $x = y * y$}

**T**

3. $\{sum = (\Sigma i \colon i \in [0, x) \, . \, i)\}$
   $sum := sum + x; x := x + 1$
   $\{sum = (\Sigma i \colon i \in [0, x) \, . \, i)\}$

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare un'asserzione $R$ tale che le seguenti triple siano verificate:

(3.1) $\{sum = (\Sigma i \colon i \in [0, x) \, . \, i)\}$
$sum := sum + x$
$\{R\}$

(3.2) $\{R\}$
$x := x + 1$
$\{sum = (\Sigma i \colon i \in [0, x) \, . \, i)\}$

Per l'Assioma dell'Assegnamento, la (3.2) è verificata per il seguente valore di $R$:

$def(x + 1) \wedge sum = (\Sigma i \colon i \in [0, x) \, . \, i)[x + 1/x]$

$\equiv$ {definizione di *def* e sostituzione}

$sum = (\Sigma i \colon i \in [0, x+1) \, . \, i)$

Per verificare (3.1), per la Regola dell'Assegnamento, con la postcondizione R appena calcolata, si riduce a dimostrare che:

$$sum = (\Sigma i \colon i \in [0, x) \, . \, i) \Rightarrow def(sum + x) \wedge (sum = (\Sigma i \colon i \in [0, x+1) \, . \, i))[sum + x/sum]$$

Partiamo dalla conseguenza, applicando la sostituzione, usando la premessa come ipotesi e notando che $def(sum + x) \equiv \mathbf{T}$:

$$sum + x = (\Sigma i \colon i \in [0, x+1) \,.\, i)$$

$\equiv$ $\{\mathbf{Ip:}\ sum = (\Sigma i \colon i \in [0, x) \,.\, i)\}$

$$(\Sigma i \colon i \in [0, x) \,.\, i) + x = (\Sigma i \colon i \in [0, x+1) \,.\, i)$$

$\equiv$ {(Legge dell'intervallo per la sommatoria)}

$$\mathbf{T}$$

**ESERCIZIO 3** Si dica se le seguenti triple sono verificate oppure no ($A$ e $B$ sono variabili di specifica). Motivare formalmente le risposte.

1. $\{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0\}\ z := x + y; \quad y := y - z\ \{y < 0\}$,
2. $\{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0\}\ z, y := x + y, y - z\ \{y < 0\}$

**SOLUZIONE ESERCIZIO 5**

1. $\{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0\}\ z := x + y; \quad y := y - z\ \{y < 0\}$,

   Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare un'asserzione $R$ tale che le seguenti triple siano verificate:

   (4.1) $\{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B\}\ z := x + y\ \{R\}$

   (4.2) $\{R\}\ y := y - z\ \{y < 0\}$

   Per l'Assioma dell'Assegnamento, la (4.2) è verificata per il seguente valore di $R$:

   $$def(y - z) \wedge (y < 0)[(y - z)/y]$$

   $\equiv$ {sostituzione, definizione di $def$}

   $$(y - z < 0)$$

   Per la Regola dell'Assegnamento, la verifica di (4.1) con la postcondizione $R$ appena calcolata, si riduce a dimostrare che:

   $$(x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B) \Rightarrow def(x + y) \wedge (y - z < 0)[x + y/z]$$

   Partiamo dalla conseguenza:

   $$def(x + y) \wedge (y - z < 0)[x + y/z]$$

   $\equiv$ {sostituzione, definizione di $def$}

   $$y - (x + y) < 0$$

   $\equiv$ {calcolo}

   $$-x < 0$$

   $\equiv$ $\{\mathbf{Ip:}\ x = A \wedge A \geq B \wedge B > 0\}$

   $$\mathbf{T}$$

2. $\{x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0\}$ $z, y := x + y, y - z$ $\{y < 0\}$

   Abbiamo qui un caso di Assegnamento Multiplo e non Semplice, che prevede di valutare tutte le espressioni **prima** di tutti gli assegnamenti. Applicando la regola dell'Assegnamento Multiplo ci riduciamo a verificare:

$$(x = A \wedge y = B \wedge B > 0 \wedge A \geq B \wedge z = 0) \Rightarrow$$
$$def(x + y) \wedge def(y - z) \wedge (y < 0)[(x + y)/z, (y - z)/y]$$

   Partiamo dalla conseguenza:

$$def(x + y) \wedge def(y - z) \wedge (y < 0)[(x + y)/z, (y - z)/y]$$

$\equiv$ {sostituzione, definizione di $def$}

$$y - z < 0$$

$\equiv$ {**Ip:** $y = B \wedge z = 0)$}

$$B < 0$$

$\equiv$ {**Ip:** $B > 0$}

$$\mathbf{F}$$

   Quindi la tripla non è verificata.

**ESERCIZIO 4** Si verifichi la seguente tripla.

$\{x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)\}$
**if** $x \,\%\, 6 = 0$ **then** y := y + x **else** skip **fi**;
x := x + 1
$\{y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)\}$

**SOLUZIONE ESERCIZIO 4**

Applicando la Regola della Sequenza, dobbiamo trovare un'asserzione $R$ tale che le seguenti triple siano verificate:

(6.1) $\{x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)\}$ **if** $x \,\%\, 6 = 0$ **then** $y := y + x$ **else** $skip$ **fi** $\{R\}$

(6.2) $\{R\}$ $x := x + 1$ $\{y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)\}$

Per l'Assioma dell'Assegnamento, la (6.2) è verificata per $R$ uguale a:

$$def(x + 1) \wedge (y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i))[x + 1/x]$$

Quindi semplificando, abbiamo che $R$ è:

$$(y = (\Sigma i : i \in [0, x] \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i))$$

Per la (6.1), applichiamo la Regola del Condizionale, per la quale dobbiamo verificare che

(6.1.1) $x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0, x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i) \Rightarrow def(x \,\%\, 6 = 0)$

ovvia essendo $def(x \,\%\, 6 = 0) \equiv \mathbf{T}$

(6.1.2) $\{x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0,x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i) \wedge (x \,\%\, 6 = 0)\}\ y := y + x\ \{R\}$

(6.1.3) $\{x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0,x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i) \wedge \neg(x \,\%\, 6 = 0)\}$ skip $\{R\}$

Per la (6.1.2), usiamo la Regola dell'Assegnamento, dobbiamo dimostrare, ignorando $def(y+x)$ che è equivalente a **T**, l'implicazione

$$(x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0,x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i) \wedge (x \,\%\, 6 = 0))$$
$$\Rightarrow$$
$$(y + x = (\Sigma i : i \in [0,x] \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i))$$

Partiamo dalla conclusione:

$y + x = (\Sigma i : i \in [0,x] \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i))$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $x \,\%\, 6 = 0$, (Intervallo-$\Sigma$)$\}$

$y + x = (\Sigma i : i \in [0,x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)) + x$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $y = (\Sigma i : i \in [0,x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)\}$

$y + x = y + x$

$\equiv$ $\{$calcolo$\}$

**T**

Per la (6.1.3), applichiamo l'Assioma del Comando Vuoto e la Regola PRE e ci riduciamo a dimostrare che:

$x \geq 0 \wedge y = (\Sigma i : i \in [0,x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i) \wedge \neg(x \,\%\, 6 = 0) \ \Rightarrow\ y = (\Sigma i : i \in [0,x] \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)$

Partiamo dalla conclusione

$y = (\Sigma i : i \in [0,x] \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $x \,\%\, 6 \neq 0$, (Intervallo-$\Sigma$)$\}$

$y = (\Sigma i : i \in [0,x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)$

$\equiv$ $\{$**Ip:** $y = (\Sigma i : i \in [0,x) \wedge i \,\%\, 6 = 0 \,.\, i)\}$

**T**

**ESERCIZIO 5** Si consideri il seguente array **a** con dominio $[0, 4)$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 6 | 11 | 4 |

Si dimostri, utilizzando più volte la legge dell'intervallo per la sommatoria, la validità della seguente formula:

$$m = (\Sigma x \,:\, x \in [0,4) \wedge pari(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x] - 1)^2) \qquad \equiv \qquad m = 34$$

**SOLUZIONE ESERCIZIO 5**

$m = (\Sigma x \,:\, x \in [0,3] \wedge pari(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x] - 1)^2)$

$\equiv$ $\{$(Intervallo-$\Sigma$), $pari(\mathbf{a}[3])\}$

$m = (\Sigma x \,:\, x \in [0,2] \wedge pari(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x] - 1)^2) + 9$

$\equiv$ $\{$(Intervallo-$\Sigma$), $\neg pari(\mathbf{a}[2])\}$

$$
\begin{aligned}
& m = (\Sigma x : x \in [0,1] \wedge \mathit{pari}(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x]-1)^2) + 9 \\
\equiv \quad & \{(\text{Intervallo-}\Sigma),\ \mathit{pari}(\mathbf{a}[1])\} \\
& m = (\Sigma x : x \in [0,0] \wedge \mathit{pari}(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x]-1)^2) + 9 + 25 \\
\equiv \quad & \{(\text{Intervallo-}\Sigma),\ \neg \mathit{pari}(\mathbf{a}[0])\} \\
& m = (\Sigma x : x \in [0,0) \wedge \mathit{pari}(\mathbf{a}[x]) \,.\, (\mathbf{a}[x]-1)^2) + 34 \\
\equiv \quad & \{(\Sigma\text{-vuoto})\} \\
& m = 34
\end{aligned}
$$