# LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2016/17
# Sesta Esercitazione — 15/12/2016 — Soluzioni Proposte

**Attenzione:** Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

**ESERCIZIO 1** Si consideri il seguente frammento di programma annotato

$\{x = 0 \wedge y = 0 \wedge n \geq 0\}$
$\{\mathsf{Inv}: y = x * n \wedge x \in [0, n]\}\{\mathrm{t}: n - x\}$
**while** $(x < n)$ **do**
  $x, y := x + 1, y + n$
**endw**
$\{y = n^2\}$

1. Si scrivano le ipotesi di progresso, di invarianza e di terminazione.
2. Si dimostrino le ipotesi di progresso e di invarianza.

**SOLUZIONE ESERCIZIO 1**

Invariante $Inv : y = x * n \wedge x \in [0, n]$
Funzione di terminazione $t : n - x$
Condizione $E : x < n$
Comando $C : x, y := x + 1, y + n$
Variabile di Specifica: $V$ denota un generico valore

**Ipotesi di Progresso** ($\{Inv \wedge E \wedge t = V\}\ C\ \{t < V\}$)

$\{y = x * n \wedge x \in [0, n] \wedge x < n \wedge n - x = V\}$
  $x, y := x + 1, y + n$
$\{n - x < V\ \}$

**Ipotesi di Invarianza** ($\{Inv \wedge E\}\ C\ \{Inv \wedge def(E)\}$)

$\{y = x * n \wedge x \in [0, n] \wedge x < n\}$
  $x, y := x + 1, y + n$
$\{y = x * n \wedge x \in [0, n] \wedge def(x < n)\}$

**Ipotesi di Terminazione** ($Inv \Rightarrow t \geq 0$)

$\{y = x * n \wedge x \in [0, n] \Rightarrow n - x \geq 0\}$

- Per verificare l'Ipotesi di Progresso, sfruttiamo l'**Assioma dell'Assegnamento Multiplo**

$(ASS - MULT)\quad \{def(E_1) \wedge ... \wedge def(E_k) \wedge P[^{E_1,...,E_k}/_{x_1,...,x_k}]\}\ x_1, ..., x_k := E_1, ..., E_k\ \{P\}$

che richiede di valutare tutte le espressioni **prima** di tutti gli assegnamenti. Otteniamo quindi che la seguente tripla è automaticamente verificata:

$$\{def(x+1) \wedge def(y+n) \wedge (n-x<V)[^{x+1,y+n}/_{x,y}]\}\ x,y := x+1, y+n\ \{n-x<V\}$$

Per la regola PRE

$$(PRE)\quad \frac{P \Rightarrow P' \qquad \{P'\}\ C\ \{R\}}{\{P\}\ C\ \{R\}}$$

ci rimane da dimostrare che

$$y = x*n\ \wedge\ x \in [0,n]\ \wedge\ x<n\ \wedge\ n-x=V \Rightarrow$$
$$def(x+1)\ \wedge\ def(y+n)\ \wedge\ (n-x<V)[^{x+1,y+n}/_{x,y}]$$

Partiamo dalla conseguenza:

$def(x+1) \wedge def(y+n) \wedge (n-x<V)[^{x+1,y+n}/_{x,y}]$

$\equiv$ {definizione di *def*, sostituzione, semplificazione}

$\mathbf{T} \wedge \mathbf{T} \wedge n-(x+1)<V$

$\equiv$ {calcolo}

$n-x-1<V$

$\equiv$ {**Ip:** $n-x=V$}

$\mathbf{T}$

- Per verificare l'ipotesi di Invarianza, sfruttando ancora l'**Assioma dell'Assegnamento Multiplo** e la regola PRE, dobbiamo dimostrare:

$$y = x*n \wedge x \in [0,n] \wedge x<n \Rightarrow$$
$$def(x+1) \wedge def(y+n) \wedge (y=x*n \wedge x \in [0,n] \wedge def(x<n))[^{x+1,y+n}/_{x,y}]$$

Partiamo dalla conclusione:

$def(x+1) \wedge def(y+n) \wedge (y=x*n \wedge x \in [0,n] \wedge def(x<n))[^{x+1,y+n}/_{x,y}]$

$\equiv$ {sostituzione e semplificazione}

$y+n=(x+1)*n \wedge x+1 \in [0,n]$

$\equiv$ {**Ip:** $y=x*n$}

$(x*n)+n=(x+1)*n \wedge x+1 \in [0,n]$

$\equiv$ {**Ip:** $x \in [0,n]$, $(x<n)$, calcolo}

$\mathbf{T}$

- Per verificare l'ipotesi di Terminazione

$$y = x*n \wedge x \in [0,n] \Rightarrow n-x \geq 0$$

Partiamo dalla conclusione:

$n - x \geq 0$

$\equiv$ {**Ip:** $x \in [0, n]$, calcolo}

**T**

**ESERCIZIO 2** Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a: array [0, n) of nat**)

$\{P\}$
**if** $a[x] > a[x-1]$ **then** $sum := sum + 2 * a[x]$ **else** skip **fi**
$\{Q\}$

dove

- $P \equiv x \in [1, n) \wedge sum = (\Sigma i : i \in [1, x) \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i])$,
- $Q \equiv sum = (\Sigma i : i \in [1, x] \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i])$.

**SOLUZIONE ESERCIZIO 2**

Applicando la **Regola del Condizionale**

$$(COND) \quad \frac{P \Rightarrow def(E) \qquad \{P \wedge E\}\ C_1\ \{Q\} \qquad \{P \wedge \neg E\}\ C_2\ \{Q\}}{\{P\}\ \textbf{if}\ E\ \textbf{then}\ C_1\ \textbf{else}\ C_2\ \textbf{fi}\ \{Q\}}$$

dobbiamo verificare che

1. $P \Rightarrow def(a[x] > a[x-1])$
2. $\{P \wedge a[x] > a[x-1]\}\ sum := sum + 2 * a[x]\ \{Q\}$
3. $\{P \wedge \neg(a[x] > a[x-1])\}$ skip $\{Q\}$

1. La 1) è vera dato che:

   $def(a[x] > a[x-1])$

   $\equiv$ {definizione di *def*}

   $def(a[x]) \wedge def(a[x-1])$

   $\equiv$ {definizione di *def*}

   $def(x) \wedge x \in dom(a) \wedge def(x-1) \wedge x - 1 \in dom(a)$

   $\equiv$ {definizione di *def*, **Ip:** $dom(a) = [0, n), x \in [1, n)$}

   **T**

2. Per dimostrare la 2) applichiamo la **Regola dell'Assegnamento**

$$(ASS) \quad \frac{R \Rightarrow def(E) \wedge P[E/x]}{\{R\}\ x := E\ \{P\}}$$

e ci riduciamo a dimostrare che

$$x \in [1,n) \wedge sum = (\Sigma i : i \in [1,x) \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i]) \wedge a[x] > a[x-1] \Rightarrow$$
$$def(sum + 2 * a[x]) \wedge \big(sum = (\Sigma i : i \in [1,x] \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i])\big)[^{sum+2*a[x]}/_{sum}]$$

Partiamo dalla conseguenza

$$def(sum + 2 * a[x]) \wedge \big(sum = (\Sigma i : i \in [1,x] \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i])\big)[^{sum+2*a[x]}/_{sum}]$$

$\equiv$ {definizione di *def*, sostituzione}

$$x \in dom(a) \wedge \big(sum + 2 * a[x] = (\Sigma i : i \in [1,x] \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i])\big)$$

$\equiv$ {$dom(a) = [0,n)$, legge (interv-$\Sigma$), **Ip:** $x \in [1,n)$, $a[x] > a[x-1]$}

$$sum + 2 * a[x] = (\Sigma i : i \in [1,x) \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i]) + 2 * a[i][^{x}/_{i}]$$

$\equiv$ {**Ip:** $sum = \big(\Sigma i : i \in [1,x) \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i]\big)$, sostituzione}

$$sum + 2 * a[x] = sum + 2 * a[x]$$

3. Per dimostrare la 3), sfruttando l'**Assioma del Comando Vuoto**

$$(SKIP) \qquad \{Q\}\ \text{skip}\ \{Q\}$$

e la regola PRE dobbiamo dimostrare che

$$x \in [1,n) \wedge sum = \big(\Sigma i : i \in [1,x) \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i]\big) \ \wedge \ \neg(a[x] > a[x-1]) \Rightarrow$$
$$sum = (\Sigma i : i \in [1,x] \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i])$$

Partiamo dalla conseguenza:

$$sum = (\Sigma i : i \in [1,x] \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i])$$

$\equiv$ {legge (interv-$\Sigma$), **Ip:** $x \in [1,n)$, $\neg(a[x] > a[x-1])$}

$$sum = (\Sigma i : i \in [1,x) \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i])$$

$\equiv$ {**Ip:** $sum = (\Sigma i : i \in [1,x) \wedge a[i] > a[i-1] \,.\, 2 * a[i])$}

**T**

**ESERCIZIO 3** Si verifichi la seguente tripla di Hoare (assumendo **a: array [0, n) of nat**)

$$\{h \in dom(a) \wedge h \geq 1 \wedge (\forall i.i \in [0,h) \Rightarrow a[i] > k)\}$$
$$a[h] := a[0] + 1$$
$$\{(\forall i.i \in [0,h] \Rightarrow a[i] > k)\}$$

**SOLUZIONE ESERCIZIO 3**
Sfruttando l'**Assioma dell'Aggiornamento Selettivo**

$$\text{(AGG-SEL)} \quad \{def(E) \wedge def(E') \wedge E \in dom(\mathbf{a}) \wedge P[^{\mathbf{b}}/_{\mathbf{a}}]\}\ \mathbf{a}[E] := E'\ \{P\}, \quad \text{dove } \mathbf{b} = \mathbf{a}[^{E'}/_{E}]$$

e la regola PRE, dobbiamo verificare la seguente implicazione:

$$h \in dom(a) \wedge h \geq 1 \wedge (\forall i.i \in [0,h) \Rightarrow\ a[i] > k) \Rightarrow$$
$$def(h) \wedge def(a[0]+1) \wedge h \in dom(a) \wedge (\forall i.i \in [0,h] \Rightarrow a[i] > k)[^{\mathbf{a}'}/_{a}]$$

dove $\mathbf{a}' = a\left[^{a[0]+1}/_{h}\right]$.
Partiamo dalla conseguenza:

$$def(h) \wedge def(a[0]+1) \wedge h \in dom(a) \wedge (\forall i.i \in [0,h] \Rightarrow a[i] > k)[^{\mathbf{a}'}/_{a}]$$

$\equiv$ {definizione di $def$}

$$0 \in dom(a) \wedge h \in dom(a) \wedge (\forall i.i \in [0,h] \Rightarrow a[i] > k)[^{\mathbf{a}'}/_{a}]$$

$\equiv$ {**Ip:** $h \in dom(a)$, $0 \in dom(a)$; sostituzione}

$$(\forall i.i \in [0,h] \Rightarrow \mathbf{a}'[i] > k)$$

$\equiv$ {definizione di $\mathbf{a}'$}

$$(\forall i.i \in [0,h] \Rightarrow a\left[^{a[0]+1}/_{h}\right][i] > k)$$

$\equiv$ {Intervallo-$\forall$, $h > 0$}

$$(\forall i.i \in [0,h) \Rightarrow a\left[^{a[0]+1}/_{h}\right][i] > k) \wedge a\left[^{a[0]+1}/_{h}\right][h] > k$$

$\equiv$ $\left\{\text{definizione di } a\left[^{a[0]+1}/_{h}\right], (\forall i.i \in [0,h) \Rightarrow i \neq h)\right\}$

$$(\forall i.i \in [0,h) \Rightarrow a[i] > k) \wedge a[0]+1 > k$$

$\equiv$ {**Ip:** $(\forall i.i \in [0,h) \Rightarrow a[i] > k)$}

$$a[0]+1 > k$$

$\equiv$ {$(\forall i.i \in [0,h) \Rightarrow a[i] > k) \wedge h \geq 1 \Rightarrow a[0] > k$, calcolo}

**T**

**ESERCIZIO 4** Si consideri il seguente frammento di programma annotato

$\{x = 0 \wedge z = 1 \wedge n \geq 0 \wedge m \geq 0\}$
$\{\mathsf{Inv}:\ x \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^x\}\{\text{t: } max(n,m) - x\}$
**while** $(x < n$ or $x < m)$ **do**
  $z := z * w;$
  $x := x + 1$
**endw**
$\{z = w^{max(m,n)}\}$

1. Si scrivano le ipotesi di invarianza, di progresso e di terminazione.
2. Si dimostri l'ipotesi di invarianza.

**SOLUZIONE ESERCIZIO 4**

Invariante $Inv : x \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^x\}$
Funzione di terminazione $t : max(n,m) - x$
Condizione $E : (x < n \vee x < m)$
Comando $C : z := z * w; x := x + 1$
Variabile di Specifica: $V$ denota un generico valore

1. **Ipotesi di Progresso** ($\{Inv \wedge E \wedge t = V\}\ C\ \{t < V\}$)

$$\{x \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^x \wedge (x < n \vee x < m) \wedge max(n,m) - x = V\ \}$$
z := z * w;
x := x+1
$$\{max(n,m) - x < V\ \}$$

**Ipotesi di Terminazione** ($Inv \Rightarrow t \geq 0$)

$$x \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^x \Rightarrow max(n,m) - x \geq 0$$

**Ipotesi di Invarianza** ($\{Inv \wedge E\}\ C\ \{Inv \wedge def(E)\}$)

$$\{x \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^x \wedge (x < n \vee x < m)\ \}$$
z := z * w;
x := x+1
$$\{x \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^x \wedge def(x < n \text{ or } x < m)\ \}$$

2. Per verificare l'Ipotesi di Invarianza, applicando la **Regola della Sequenza**

$$(SEQ)\quad \frac{\{P\}\ C\ \{\mathbf{R}\} \qquad \{\mathbf{R}\}\ C'\ \{Q\}}{\{P\}\ C; C'\ \{Q\}}$$

dobbiamo trovare un'asserzione **R** tale che le seguenti triple siano verificate:

(2.1)
$$\{x \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^x \wedge (x < n \vee x < m)\ \}$$
z := z * w
$$\{\mathbf{R}\}$$

(2.2)
$$\{\mathbf{R}\}$$
x := x+1
$$\{x \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^x \wedge def(x < n \text{ or } x < m)\ \}$$

Partiamo da (2.2) applicando l'**Assioma dell'Assegnamento**

$$(ASS)\quad \{def(E) \wedge P[E/x]\}\ x := E\ \{P\}$$

ed otteniamo il seguente valore di **R**:

$$def(x+1) \wedge (x \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^x)[^{x+1}/_x]$$

$\equiv$ {definizione di *def*, sostituzione}

$x+1 \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^{x+1}$

Per la **Regola dell'Assegnamento** (vedi soluzione Esercizio 2), la verifica della (2.1) con la postcondizione **R** appena calcolata si riduce a dimostrare che

$$x \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^x \wedge (x < n \vee x < m) \Rightarrow$$
$$def(z * w) \wedge (x+1 \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^{x+1})[^{z*w}/_z]$$

Partiamo dalla conseguenza:

$def(z * w) \wedge (x+1 \in [0, max(n,m)] \wedge z = w^{x+1})[^{z*w}/_z]$

$\equiv$ {sostituzione, definizione di *def*}

$x+1 \in [0, max(n,m)] \wedge z * w = w^{x+1}$

$\equiv$ {**Ip:** $z = w^x$}

$x+1 \in [0, max(n,m)] \wedge w^x * w = w^{x+1}$

$\equiv$ {calcolo, def. di intervallo}

$x+1 \geq 0 \wedge x+1 \leq max(n,m)$

$\equiv$ {**Ip:** $x \in [0, max(n,m)]$, $x \in [0, max(n,m)] \Rightarrow x+1 \geq 0$}

$x+1 \leq max(n,m)$

$\equiv$ {**Ip:** $x < n \vee x < m, x \in [0, max(n,m)]$, $x < n \vee x < m \Rightarrow x+1 \leq max(n,m)$}

**T**