

# LOGICA PER LA PROGRAMMAZIONE – a.a. 2017/18

## Terza esercitazione — 24/25-10-2017 — Soluzioni Proposte

**Attenzione:** Le soluzioni che seguono sono considerate corrette dai docenti. Per ogni esercizio possono esistere altre soluzioni corrette, anche molto diverse da quelle proposte.

1. Si consideri l'alfabeto con simboli di costante  $\mathcal{C} = \{A, P\}$  e simboli di predicato binari  $\mathcal{P} = \{\text{amici}, =\}$  e l'interpretazione  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ , dove  $\mathcal{D}$  è l'insieme delle persone e la funzione  $\alpha$  è definita come

- $\alpha(A) =$  “la persona chiamata Andrea” e  $\alpha(P) =$  “la persona chiamata Paolo”;
- $\alpha(\text{amici})(p, q)$  è vera se e solo se  $p$  e  $q$  sono amici;
- $\alpha(=)(p, q)$  è vera se e solo se  $p$  e  $q$  sono la stessa persona.

Si fornisca per ognuno dei seguenti enunciati una formula del primo ordine che lo formalizzi

- “**Tutti** sono amici di se stessi”
- “**Tutti** hanno **qualcuno** che è loro amico”
- “Paolo ha **un solo** amico”
- “**Ogni** amico di Paolo è amico di Andrea”
- “Paolo **non ha** amici in comune con Andrea”

### SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Ogni enunciato va analizzato in modo da capire come esprimerlo in forma logica. Non è detto che la formalizzazione sia unica.

- Quando troviamo un **tutti** o **ognuno** o **ogni** o **qualsiasi** dobbiamo subito pensare ad una quantificazione universale  $\forall$  accompagnata da una certa proprietà soddisfatta da **tutti** gli elementi del dominio. In questo caso la proprietà è quella di “essere amico di se stesso”, che può essere formalizzata usando il predicato  $\text{amici}(-, -)$  usando due volte la stessa variabile. Otteniamo dunque:

$$(\forall x. \text{amici}(x, x))$$

Usando l'interpretazione  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$  descritta sopra la formula può essere letta come “**Per ogni persona  $p$  vale (la proprietà) che  $p$  e  $p$  sono amici**”, che ha lo stesso significato dell'enunciato originale.

- Come prima, trovando un “**tutti**” pensiamo a  $\forall$  accompagnato da una certa proprietà che soddisfatta da tutte le persone, in questo caso “avere **qualcuno** che è loro amico”. Ora, quando troviamo **qualcuno**, **qualcuna** o **un, uno, ...** o **c'è, ci sono** dobbiamo pensare ad una quantificazione esistenziale  $\exists$  accompagnata da una proprietà che vale per **almeno un** elemento. Abbiamo quindi in questo caso un annidamento di quantificatori.

L'enunciato è tuttavia lievemente ambiguo, per cui entrambe le seguenti soluzioni sono corrette, anche se non equivalenti:

- Se si interpreta come “**Tutti** hanno **qualcuno** (**diverso da loro stessi**) che è loro amico” allora la formula è la seguente:

$$(\forall x. (\exists y. \text{amici}(x, y) \wedge \neg=(x, y)))$$

- Se invece si interpreta “**Tutti** hanno **qualcuno** (**non necessariamente diverso da loro stessi**) che è loro amico” allora la formula è la seguente

$$(\forall x.(\exists y.amici(x, y)))$$

- (c) Come prima, trovando “**un**” pensiamo ad un  $\exists$  ed trovando accanto “**solo**” pensiamo all’unicità, **unicità** che va resa logicamente. Un modo per formalizzare in questo caso è il seguente:

$$(\exists x.amici(x, P) \wedge (\forall y.amici(y, P) \Rightarrow =(x, y)))$$

ovvero “Esiste una persona  $p$  tale che  $p$  e Paolo sono amici, e per ogni persona  $q$  vale che se  $q$  e Paolo sono amici allora  $p$  e  $q$  sono la stessa persona”.

Una soluzione equivalente è anche:

$$(\exists x.amici(x, P) \wedge \neg(\exists y.amici(y, P) \wedge \neg=(x, y)))$$

ovvero, in modo più semplice, “Paolo ha un amico e non è vero che esiste un amico di Paolo diverso da quello”.

In generale, non si accetta la scrittura  $(\exists!.P(x))$ , per indicare l’unicità. Richiediamo invece la forma  $(\exists x.P(x) \wedge (\forall y.P(y) \Rightarrow =(x, y)))$  che definisce logicamente l’unicità.

- (d) Trovando un **ogni** pensiamo ad un  $\forall$ . La quantificazione qui è ristretta ai soli amici di Paolo. Un modo naturale per formalizzare l’enunciato è riconoscere un’implicazione implicita: “Per ognuno vale che essere amico di Paolo **implica** essere amico di Andrea”.

$$(\forall x.amici(x, P) \Rightarrow amici(x, A))$$

- (e) Per formalizzare questo enunciato possiamo procedere in modi diversi. Ad esempio, trovando **non ha** possiamo pensare alla negazione di una quantificazione esistenziale  $\exists$ .

$$\neg(\exists x.amici(x, P) \wedge amici(x, A))$$

cioè “**non** è vero che **esiste qualcuno** che è amico di Paolo **e** di Andrea”.

Equivalentemente, possiamo usare la seguente formalizzazione:

$$(\forall x.(\forall y.amici(x, P) \wedge amici(y, A) \Rightarrow \neg = (x, y)))$$

ovvero, “prese due **qualsiasi** persone, se una è amico di Paolo **e** l’altra è amico di Andrea, allora non sono la stessa persona”.

In alternativa, in analogia al punto (d), possiamo anche formalizzare nel modo seguente

$$(\forall x.amici(x, P) \Rightarrow \neg amici(x, A))$$

ovvero “se una persona è amico di Paolo allora non è amico di Andrea”

2. Per ognuno dei seguenti enunciati si fornisca un adeguato alfabeto del primo ordine, una interpretazione sul dominio delle persone e una formula del primo ordine che lo formalizzi

- (a) “Ogni senatore ha un segretario, ma il senatore Razzi ne ha più di uno”  
 (b) “Mario è zio di Lucia se è il fratello di sua madre o di suo padre”

## SOLUZIONE ESERCIZIO 2

(a) “Ogni senatore ha un segretario”, ma “il senatore Razzi ne ha più di uno”

- **Alfabeto:**  $\mathcal{C} = \{R\}$ ,  $\mathcal{F} = \emptyset$ ,  $\mathcal{P} = \{senatore, segretarioDi, =\}$ , dove i simboli di predicato  $segretarioDi$  ed  $=$  sono binari, mentre  $senatore$  è unario.
- **Interpretazione:**  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$  con  $\mathcal{D}$  insieme delle persone e
  - $\alpha(R) =$  “la persona chiamata Razzi”
  - $\alpha(senatore)(d) \equiv \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  è un senatore
  - $\alpha(segretarioDi)(d, d') \equiv \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  è un segretario di  $d'$
  - $\alpha(=)(d, d') \equiv \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  e  $d'$  sono la stessa persona

L’enunciato è formato da due sotto-enunciati uniti da un “ma” che renderemo con un  $\wedge$ . Consideriamo il primo: “Ogni senatore ha un segretario”. Come prima, pensiamo ad un  $\forall$ . La quantificazione è ristretta ai soli senatori e anche in questo caso abbiamo un’implicazione implicita: “Per ogni persona vale che essere senatore implica avere almeno un segretario”. L’aver almeno un segretario ci fa pensare ad un  $\exists$ . La formalizzazione è dunque:

$$(\forall x. senatore(x) \Rightarrow (\exists y. segretarioDi(y, x)))$$

Consideriamo ora il secondo sotto-enunciato. Dire che “il senatore Razzi ha più di un segretario” equivale a dire che Razzi è un senatore e che “esistono due persone, entrambe segretario di Razzi e diverse tra loro”. L’enunciato può essere quindi formalizzato nel seguente modo:

$$senatore(R) \wedge (\exists y. (\exists z. segretarioDi(y, R) \wedge segretarioDi(z, R) \wedge \neg =(y, z)))$$

Complessivamente abbiamo dunque:

$$(\forall x. senatore(x) \Rightarrow (\exists y. segretarioDi(y, x))) \wedge \\ senatore(R) \wedge (\exists y. (\exists z. segretarioDi(y, R) \wedge segretarioDi(z, R) \wedge \neg =(y, z)))$$

(b) “Mario è zio di Lucia se è il fratello di sua madre o di suo padre”

- **Alfabeto:**  $\mathcal{C} = \{M, L\}$ ,  $\mathcal{F} = \{madre(-), padre(-)\}$ ,  $\mathcal{P} = \{\{zio(-, -), fratelli(-, -)\}^1$
- **Interpretazione:**  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$  con  $\mathcal{D}$  insieme delle persone e
  - $\alpha(M) =$  “la persona chiamata Mario”
  - $\alpha(L) =$  “la persona chiamata Lucia”
  - $\alpha(madre)(d) = d'$  dove  $d'$  è la madre di  $d$
  - $\alpha(padre)(d) = d'$  dove  $d'$  è il padre di  $d$
  - $\alpha(zio)(d, d') \equiv \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  è zio di  $d'$
  - $\alpha(fratelli)(d, d') \equiv \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  e  $d'$  sono fratelli

L’enunciato si può riformulare come “Se Mario è il fratello della madre di Lucia o del padre di Lucia allora Mario è zio di Lucia”. Quindi lo si può formalizzare nel seguente modo:

$$zio(M, L) \Leftarrow fratelli(M, madre(L)) \vee fratelli(M, padre(L))$$

Si noti che abbiamo considerato  $madre$  e  $padre$  come simboli di funzione unari. Alternativamente li si poteva introdurre come simboli di predicato binari. In questo caso nella

<sup>1</sup>La notazione indica che  $zio$  e  $fratelli$  sono simboli di predicato binari ed  $madre$  e  $padre$  sono simboli di funzione unari.

soluzione l'insieme  $\mathcal{F}$  sarebbe vuoto, mentre  $\mathcal{P}$  conterrebbe anche i simboli di predicato  $madre(-, -)$  e  $padre(-, -)$  con la seguente interpretazione:

$$\begin{aligned}\alpha(madre)(d, d') &\equiv \mathbf{T} \text{ se e solo se } d \text{ è madre di } d' \\ \alpha(padre)(d, d') &\equiv \mathbf{T} \text{ se e solo se } d \text{ è padre di } d'\end{aligned}$$

Una possibile formalizzazione in questo caso sarebbe:

$$zio(M, L) \Leftarrow (\exists x. fratelli(M, x) \wedge (madre(x, L) \vee padre(x, L)))$$

ovvero “ se Mario ha **un** fratello (sorella) che è padre o madre di Lucia, allora Mario è zio di Lucia”.

In generale le relazioni di parentela si formalizzano con simboli di predicato, quindi interpretate come relazioni binarie sul dominio delle persone  $\mathcal{D}$ , ovvero come sottoinsiemi del prodotto cartesiano  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ . Nel caso particolare di  $madre$  e  $padre$ , essendo la relazione totale e univoca si può optare per la formalizzazione con simboli di funzione. Ricordiamo infatti che una relazione binaria  $R$  su  $\mathcal{D}$  (cioè  $R \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ ) è una *funzione* se soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}[\text{totalità}] & (\forall x. (\exists y. (x, y) \in R)) \\ [\text{univocità}] & (\forall x. (\forall y. (\forall z. (x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \Rightarrow y = z)))\end{aligned}$$

Non è possibile fare altrettanto con  $zio$  e  $fratelli$ : non è detto infatti che ogni elemento del dominio di partenza abbia un'immagine nel dominio di arrivo (non tutti hanno uno zio) e non è neanche detto che esista una sola immagine (si possono avere più fratelli).

3. Si calcoli, motivando la risposta, il valore di verità della formula

$$\Phi = (\forall z. P(z)) \vee (\forall y. (\exists x. Q(x, y) \wedge P(x)))$$

nell'interpretazione  $I = (\mathcal{D}, \alpha)$ , dove  $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$  ed  $\alpha$  è definita come segue

$$\alpha(P)(w) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } w \in \{a, b\}, \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad \alpha(Q)(w, v) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } (w, v) \in \{(a, a), (c, a), (c, b), (b, c)\}, \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli cioè  $I_{\rho_0}(\Phi)$  usando le regole della semantica del primo ordine, dove  $\rho_0$  è un assegnamento arbitrario.

### SOLUZIONE ESERCIZIO 3

**Soluzione** Presentiamo una soluzione parzialmente informale.

Si richiede di valutare, nell'interpretazione data, il valore di verità della formula

$$\Phi = \boxed{(\forall z. P(z))} \vee \boxed{(\forall y. (\exists x. Q(x, y) \wedge P(x)))}$$

- Trattandosi della disgiunzione di due formule (quelle riquadrate), essa è vera se lo è almeno una delle due (regola (S5)).
- La prima formula  $(\forall z. P(z))$ , essendo una **quantificazione universale**, per la regola (S8) è vera se e solo se assegnando a  $z$  un qualunque valore  $d \in \mathcal{D}$  la formula  $P(z)$  diventa vera, ovvero  $\alpha(P)(d)$  è vera. Formalmente:

$$I_{\rho_0}((\forall z. P(z))) = \mathbf{T} \Leftrightarrow I_{\rho_0[d/z]}(P(z)) = \mathbf{T} \text{ per ogni valore } d \text{ del dominio}$$

Tuttavia dalla definizione di  $P$ , sappiamo che  $\alpha(P)(c)$  è falsa, e quindi anche la formula  $(\forall z. P(z))$  lo è. Formalmente, abbiamo che  $I_{\rho_0[c/z]}(P(z))$  è falsa in base alla regola (S1).

- Anche la seconda formula  $(\forall y . (\exists x . Q(x, y) \wedge P(x)))$  è una **quantificazione universale**, e quindi è vera se e solo se per ogni valore  $d \in \mathcal{D}$  del dominio, sostituendo  $y$  con  $d$  si rende vera la formula  $\Psi = (\exists x . Q(x, y) \wedge P(x))$ . Formalmente:

$$I_{\rho_0}((\forall y . (\exists x . Q(x, y) \wedge P(x)))) = \mathbf{T} \Leftrightarrow I_{\rho_0[d/y]}(\Psi) = \mathbf{T} \text{ per ogni valore } d \text{ del dominio.}$$

In particolare, deve essere vera assegnando  $b$  a  $y$ . Dobbiamo verificare quindi che  $I_{\rho_0[b/y]}(\exists x . Q(x, y) \wedge P(x))$  sia vera.

- Poiché  $(\exists x . Q(x, y) \wedge P(x))$  è una **quantificazione esistenziale**, per la regola (S9)  $I_{\rho_0[b/y]}(\exists x . Q(x, y) \wedge P(x))$  è vera se esiste un valore  $d'$  del dominio che assegnato a  $x$  rende vera la formula  $Q(x, y) \wedge P(x)$ . Formalmente:

$$I_{\rho_0[b/y]}(\exists x . Q(x, y) \wedge P(x)) = \mathbf{T} \Leftrightarrow \text{se esiste } d' . I_{\rho_0[b/y][d'/x]}(Q(x, y) \wedge P(x)) = \mathbf{T}$$

Dobbiamo verificare quindi che  $I_{\rho_0[b/y][d'/x]}(Q(x, y) \wedge P(x))$  sia vera. Tuttavia, nessun valore del dominio rende vera questa formula, come si può verificare, usando le regole (S1) e (S4):

$$\begin{aligned} I_{\rho_0[b/y][a/x]}(Q(x, y) \wedge P(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{F} \\ I_{\rho_0[b/y][b/x]}(Q(x, y) \wedge P(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{F} \\ I_{\rho_0[b/y][c/x]}(Q(x, y) \wedge P(x)) &= \mathbf{T} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F} \end{aligned}$$

- Ne consegue che la formula  $\Phi$  è falsa nell'interpretazione data.

4. Per ognuno dei seguenti enunciati si fornisca un adeguato alfabeto del primo ordine, una interpretazione su un dominio da definire e una formula del primo ordine che lo formalizzi

- “Le squadre che **non** hanno passato la prima fase sono scarse, **ma ci sono** squadre scarse, come il Brasile, che hanno passato la prima fase”
- “**Tutti** gli studenti che superano l'esame di un corso lo hanno frequentato”

#### SOLUZIONE ESERCIZIO 4

- **Alfabeto:**  $\mathcal{C} = \{\text{Brasile}\}$ ,  $\mathcal{F} = \emptyset$  e  $\mathcal{P} = \{\text{scarsa}(-), \text{prima}(-)\}$ ,
  - **Interpretazione:**  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ , con
    - $\mathcal{D}$  insieme delle squadre di calcio
    - $\alpha(\text{Brasile}) = \text{“la squadra nazionale del Brasile”}$
    - $\alpha(\text{scarsa})(d) = \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  è una squadra scarsa
    - $\alpha(\text{prima})(d) = \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  è una squadra che ha passato la prima fase
  - La prima parte dell'enunciato descrive una proprietà (“essere scarse”) che riguarda tutte le squadre che soddisfano un'altra proprietà (“non aver passato la prima fase”). Possiamo leggerla, sempre in italiano ma rendendone esplicita la struttura logica, come “per ogni squadra vale che se non ha passato la prima fase allora è scarsa”, da cui la formalizzazione:

$$(\forall x . \neg \text{prima}(x) \Rightarrow \text{scarsa}(x))$$

La seconda parte dice che “esiste almeno una squadra che è scarsa e che ha passato la prima fase” e che “il Brasile è scarso e ha passato la prima fase”. Complessivamente, l'enunciato può essere quindi formalizzato nel seguente modo:

$$(\forall x . \neg \text{prima}(x) \Rightarrow \text{scarsa}(x)) \wedge ((\exists x . (\text{scarsa}(x) \wedge \text{prima}(x))) \wedge (\text{scarsa}(\text{Brasile}) \wedge \text{prima}(\text{Brasile})))$$

Si può dimostrare (con strumenti che vedremo in seguito, che questa formula è equivalente alla più semplice:

$$(\forall x. \neg \text{prima}(x) \Rightarrow \text{scarsa}(x)) \wedge (\text{scarsa}(\text{Brasile}) \wedge \text{prima}(\text{Brasile}))$$

- (b)
- **Alfabeto:**  $\mathcal{C} = \emptyset$ ,  $\mathcal{F} = \emptyset$  e  $\mathcal{P} = \{\text{corso}(-), \text{studente}(-), \text{supera}(-, -), \text{frequentato}(-, -)\}$ ,
  - **Interpretazione:**  $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$  con
    - $\mathcal{D} = \widehat{S} \uplus \widehat{C}$ , con  $\widehat{S}$  insieme degli studenti e  $\widehat{C}$  insieme dei corsi.
    - $\alpha(\text{studente})(d) = \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  è uno studente
    - $\alpha(\text{corso})(d) = \mathbf{T}$  se e solo se  $d$  è un corso
    - $\alpha(\text{supera})(d, d') = \mathbf{T}$  se e solo se lo studente  $d$  supera l'esame del corso  $d'$
    - $\alpha(\text{frequentato})(d, d') = \mathbf{T}$  se e solo se lo studente  $d$  ha frequentato il corso  $d'$
  - Si sottintende anche in questo caso una quantificazione  $\forall$  (in questo caso doppia) e un'implicazione. L'enunciato può essere formalizzato nel seguente modo:

$$(\forall x. (\forall y. \text{studente}(x) \wedge \text{corso}(y) \wedge \text{supera}(x, y) \Rightarrow \text{frequentato}(x, y)))$$