Logica per la Programmazione

Lezione 1

- Calcolo Proposizionale: sintassi e semantica
- Tautologie
- Esempi di Formalizzazione di Enunciati

Un Problema di Deduzione Logica [da un test di ingresso]

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
  - Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno
- Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
  1. Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
  2. Nessuno dei tre amici è andato al cinema
  3. Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
  4. Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
- *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*

Il Calcolo Proposizionale

- È il nucleo di (quasi) tutte le logiche. Limitato potere espressivo, ma sufficiente per introdurre il concetto di dimostrazione.
- Le *proposizioni* (*enunciati dichiarativi*) sono asserzioni a cui sia assegnabile in modo univoco un valore di verità in accordo ad una interpretazione del mondo a cui si riferiscono.
- "dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa" *Aristotele*

Esempi di Proposizioni “Atomiche”

1. Roma è la capitale d’Italia
2. La Francia è uno stato del continente asiatico
3. $1+1 = 2$
4. $2+2 = 3$

Esempi di Non Proposizioni

1. Roma è la capitale d'Italia ?
2. $x+1 = 2$
3. $y+3=4$

Connettivi Logici

Connettivo	Forma simbolica	Operazione corrispondente
not	$\neg p$	*negazione*
and, *e*	$p \wedge q$	*congiunzione*
or, *o*	$p \vee q$	*disgiunzione*
se p *allora* q	$p \Rightarrow q$	*implicazione*
p *se e solo se* q	$p \equiv q$	*equivalenza*
p *se* q	$p \Leftarrow q$	*conseguenza*

Calcolo Proposizionale

- Sintassi: definisce in modo formale le asserzioni (formule) del calcolo proposizionale
- Semantica: definisce in modo formale il significato delle (formule) del calcolo proposizionale

Sintassi delle Proposizioni (Grammatica)

$$
\begin{array}{lll}
\mathit{Prop} & ::= & \\
& & \mathit{Prop} \equiv \mathit{Prop} \mid \mathit{Prop} \wedge \mathit{Prop} \mid \mathit{Prop} \vee \mathit{Prop} \mid \\
& & \mathit{Prop} \Rightarrow \mathit{Prop} \mid \mathit{Prop} \Leftarrow \mathit{Prop} \\
& & \mathit{Atom} \mid \neg \mathit{Atom} \\
\mathit{Atom} & ::= & \\
& & \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \mathit{Ide} \mid (\mathit{Prop}) \\
\mathit{Ide} & ::= & \\
& & p \mid q \mid \ldots \mid P \mid Q \mid \ldots
\end{array}
$$

Semantica (significato) delle Proposizioni

Tabelle di verità dei connettivi logici:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$	$P \Leftarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T

Si osservi in particolare il valore di verità di un'implicazione (o di una conseguenza)

Interpretazione di una Formula Proposizionale

- Come si determina il valore di verità di una formula?
- Il valore di verità si stabilisce in base ad un' interpretazione che fissa il significato dei simboli proposizionali
- Formalmente: una **interpretazione** è una funzione da variabili proposizionali a $\{T, F\}$
- Un' interpretazione determina il valore di verità di una formula
- Tale valore si calcola usando le tabelle di verità (induttivamente sulla sintassi della formula)
- Analogamente, si può costruire una tabella raccogliendo i valori per tutte le possibili interpretazioni (Tabella di Verità della Formula)

Un Esempio

- Formula

$$(P \wedge Q) \vee \neg R$$

- Interpretazione

$$\{P \mapsto T, Q \mapsto F, R \mapsto F\}$$

- Valore di verità usando una tabella:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$\neg R$	$(P \wedge Q) \vee \neg R$
T	F	F	F	T	T

- Il valore si calcola sfruttando la tabella dei connettivi logici (induttivamente sulla sintassi della formula)
- In alternativa si usa una rappresentazione compatta

Valore di verità usando una tabella

- Formula

$$(P \land Q) \lor \neg R$$

- Interpretazione

$$\{P \mapsto T, Q \mapsto F, R \mapsto F\}$$

- Rappresentazione Compatta:

P	Q	R	$((P$	$\land$	$Q)$	$\lor$	$\neg$	$R)$
T	F	F	T	F	F	**T**	T	F
			(1)	(2)	(1)	**(3)**	(2)	(1)

Tabella di Verità di una Formula: raccoglie tutte le Interpretazioni

P	Q	R	$((P$	$\wedge$	$Q)$	$\vee$	$\neg$	$R)$
T	T	T	T	T	T	**T**	F	T
T	T	F	T	T	T	**T**	T	F
T	F	T	T	F	F	**F**	F	T
T	F	F	T	F	F	**T**	T	F
F	T	T	F	F	T	**F**	F	T
F	T	F	F	F	T	**T**	T	F
F	F	T	F	F	F	**F**	F	T
F	F	F	F	F	F	**T**	T	F
			(1)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)

Tautologie e Contraddizioni

- Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale **T** per qualunque interpretazione
  - Esempio: $\mathbf{P} \vee \neg \mathbf{P}$ (vedi tabella di verità)
- Una formula è **soddisfacibile** se esiste almeno una interpretazione che la rende **T**
- Una **contraddizione** è una formula che vale **F** per qualunque per qualunque interpretazione
  - Esempio: $\mathbf{P} \wedge \neg \mathbf{P}$ (vedi tabella di verità)
- Quindi **P** è una tautologia se e solo se $\neg$**P** è una contraddizione

Implicazioni e Equivalenze Tautologiche

- Praticamente tutti i problemi nel Calcolo Proposizionale si riducono a dimostrare che una proposizione è una tautologia.
- Diciamo che

  P implica tautologicamente Q

  se e solo se

  $P \Rightarrow Q$ è una tautologia
- Analogamente diciamo che

  p è tautologicamente equivalente a q

  se e solo se

  $P \equiv Q$ è una tautologia

Dimostrazione di Tautologie

- Per dimostrare che P è una tautologia possiamo
  - Usare le tabelle di verità
    - Del tutto meccanico, richiede di considerare 2^n casi, dove n è il numero di variabili proposizionali in P
- Mostrare che non è una tautologia
  - individuando una interpretazione (valori delle variabili proposizionali) che rendono falsa P (ovvero un controesempio)

Come si vede che una Formula non è una Tautologia?

- Mostrare che la seguente formula non è una tautologia:

$$((A \Rightarrow B) \land \neg A) \Rightarrow B$$

- Basta trovare un'interpretazione che la rende falsa
- Evitare di costruire l'intera tabella di verità!!!
- Determiniamo valori di verità per A e B che rendano falsa la formula
  - Poiché è un'implicazione, è falsa solo quando la premessa è vera e la conseguenza è falsa
  - Quindi $\{B \mapsto \mathbf{F}\}$
  - La premessa è una congiunzione: per essere vera entrambi gli argomenti devono essere veri
  - $\neg A$ è vera solo se $\{A \mapsto \mathbf{F}\}$
  - Quindi abbiamo trovato l'interpretazione $\{A \mapsto \mathbf{F}, B \mapsto \mathbf{F}\}$
  - Resta da controllare che renda la formula falsa

Formalizzazione di Implicazioni in Linguaggio Naturale: Esempio

Scrivere la proposizione rappresentata da ognuna delle seguenti frasi in italiano:

- Se P allora Q
- P vale se vale Q
- P vale solo se vale Q
- P vale se e solo se vale Q
- P è condizione necessaria per Q
- P è condizione sufficiente per Q
- P è condizione necessaria e sufficiente per Q

Formalizzazione di Implicazioni in Linguaggio Naturale (1)

Scrivere la proposizione rappresentata da ognuna delle seguenti frasi in italiano:

- Se P allora Q:
  - $P \Rightarrow Q$
- P vale se vale Q:
  - $P \Leftarrow Q$
  - $Q \Rightarrow P$
- P vale solo se vale Q
  - $P \Rightarrow Q$ (analogo a se P allora Q):
- P vale se e solo se vale Q:
  - $P \equiv Q$
  - $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Formalizzazione di Implicazioni in Linguaggio Naturale (2)

- Q è condizione sufficiente per P:
  - $Q \Rightarrow P$
  - analogo a P vale se vale Q
- Q è condizione necessaria per P:
  - $P \Rightarrow Q$
  - analogo a P vale solo se vale Q
- Q è condizione necessaria e sufficiente per P (come se e solo se):
  - $P \equiv Q$
  - $(P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow P)$

Esercizi: Tautologie

Determinare (usando le tabelle di verità) se le seguenti formule proposizionali sono tautologie, contraddizioni o soddisfacibili (attenzione: le parentesi potrebbero influire sul significato delle formule)

1. $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
2. $P \wedge ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q)$
3. $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$
4. $(P \vee Q) \Rightarrow Q$
5. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R$
6. $\neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg Q$,
7. $((P \Rightarrow Q) \wedge (\neg R \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow R$
8. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$
9. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$

Esercizi: Tautologie

Mostrare che le seguenti formule proposizionali non sono tautologie (senza costruire l'intera tabella di verità trovare un controesempio):

1. $(P \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow Q$,
2. $((P \vee R) \wedge (R \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$,
3. $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg Q$,
4. $((P \Rightarrow Q) \wedge (\neg R \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow \neg R$
5. $((P \vee Q) \wedge R) \equiv (P \vee (Q \wedge R))$